第16卷第2期　　数学研究与评论　　Vol. 16 No. 2
1996年5月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 1996

因式分解范畴*

冯　良　贵

(南京大学数学系，210008)

摘　要　本文研究因式分解范畴，得到与因式分解范畴等价的范畴仍为因式分解范畴.

关键词　因式分解范畴，自然等价，标准分解.

分类号　AMS(1991) 18A20, 18B05/CCL O154

D. L. Davis 和 D. W. Robinson 在文[1]中引入因式分解范畴的定义. 事实上，许多问题在应用范畴语言来刻画研究时，都建立在因式分解范畴之上. 如把广义逆推广到范畴中去时，除[1]外，江声远在文[2]，李桃生在文[8]，R. Puystjens 和 D. W. Robinson 在文[4]都建立在因式分解范畴之上. 本文意在研究因式分解范畴，从而为它们提供基础.

若范畴 C 中每个态射 $\varphi: X\to Y$ 都有一个因式分解$(\varphi_1, Z, \varphi_2)$，即存在对象 Z 和满态射 $\varphi_1: X\to Z$，单态射 $\varphi_2: Z\to Y$，使得 $\varphi=\varphi_2\varphi_1$，则称 C 是一个因式分解范畴[1]. $(\varphi_1, Z, \varphi_2)$称为 φ 的一个标准分解.

命题 1, 2, 3 表明：因式分解范畴是常见的范畴.

命题 1　集范畴 Set，$A, B\in \mathrm{ob}\ \mathbf{S}$，$\mathrm{Mor}_{\mathbf{S}}(A, B)=B^A$，对 S 中每个态射 $f: A\to B$，令 $\varepsilon(f)$ 为 f 导出的等价关系，f^* 为 f 的导出映射，则 $\varphi: A\to A/\varepsilon(f)$($\varphi$为自然映射)为满映射，$f^*$ 为单映射，且 $f=f^*\varphi$，故有$(\varphi, A/\varepsilon(f), f^*)$为 f 的一个标准分解，从而 S 为因式分解范畴.

命题 2　左 R 模范畴 R-mod，Grp 范畴，Ring 范畴及 Rinv 范畴[5]均为因式分解范畴.

命题 3　令非零复数集为 C_0，$\mathrm{ob}\ \mathbf{C}_0=\{A\}$，$\mathrm{Mor}_{\mathbf{C}_0}(A, A)=C_0$，态射的合成为复数的乘法，则有 $\mathbf{C}_0$ 为因式分解范畴.

易见因式分解范畴有下列性质.

性质 1　C 为因式分解范畴，$\mathbf{C}^{op}$表 C 的对偶范畴，则 $\mathbf{C}^{op}$也为因式分解范畴.

性质 1 表明因式分解范畴关于对偶封闭.

性质 2　C, D 为因式分解范畴，则有积范畴 $\mathbf{C}\times\mathbf{D}$ 也为因式分解范畴.

性质 2 表明：因式分解范畴关于乘积封闭，显然可推广到有限的情形.

定理 1 与下列定义有关.

定义 1　对 $\mathbf{C}\to\mathbf{D}$ 的函子 F，若$\forall\ E\in \mathrm{ob}\ \mathbf{D}$，存在 $E_0\in \mathrm{ob}\ \mathbf{C}$，使得 $E=FE_0$，称 F 为伪满函子.

* 1993年10月2日收到.

定理 1　因式分解范畴 **C** 在忠实完全伪满函子作用下封闭.

证明　设 $\psi:C\to D$ 是 **D** 中任一态射，由 F 为完全伪满函子知：有 $\varphi:A\to B$ 或 $(\varphi:B\to A)$ 为 **C** 中态射，$\psi:C\to D$ 为 $F(\varphi):FA\to FB$. 因 φ 有标准分解：(φ_1,Z,φ_2). 下面验证：$(F(\varphi_1),FZ,F(\varphi_2))$ 或 $(F(\varphi_2),FZ,F(\varphi_1))$ 为 ψ 的标准分解. 因为：$\varphi=\varphi_2\varphi_1$，$F(\varphi)=F(\varphi_2\varphi_1)$，当 F 为共变函子时 $F(\varphi)=F(\varphi_2)F(\varphi_1)$，当 F 为反变函子时 $F(\varphi)=F(\varphi_1)F(\varphi_2)$. 若 $g_1F(\varphi_1)=g_2F(\varphi_1)$，因 F 为完全伪满函子，故：$F(\varphi_{11})F(\varphi_1)=F(\varphi_{12})F(\varphi_1)$，其中 $g_i=F(\varphi_{1i})$，$i=1,2$. 当 F 为共变函子时：$F(\varphi_{11}\varphi_1)=F(\varphi_{12}\varphi_1)$. 又由 F 为忠实函子，知：$\varphi_{11}\varphi_1=\varphi_{12}\varphi_1$. 由此得：$\varphi_{11}=\varphi_{12}$，进而 $g_1=g_2$. 故 $F(\varphi_1)$ 为满态射，对称地可证 $F(\varphi_2)$ 为单态射. 当 F 为反变函子时类似地可证：$F(\varphi_1)$ 为单态射 $F(\varphi_2)$ 为满态射.

所以，当 F 为共变函子时 $(F(\varphi_1),FZ,F(\varphi_2))$ 为 ψ 的一个标准分解；当 F 为反变函子时 $(F(\varphi_2),FZ,F(\varphi_1))$ 为 ψ 的一个标准分解.

以下函子 F 均指共变函子.

以复数域 C 上的向量空间为对象，向量空间之间的线性变换为态射作成范畴 **R**-mod 的子范畴 **R**-V，且作成完全子范畴. 由命题 2 知：态射 $f:V\to W$ 有标准分解 (φ_1,Z,φ_2)，把 f 看成 C 上的矩阵，则 $\forall\ A\in M(C)$ 均有满秩分解：$A=GH$，G 为列满秩阵，H 为行满秩阵.

为证定理 2，先给出下列两引理.

引理 1　给出函子 $F:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$ 及 $G:\mathbf{D}\to\mathbf{C}$，若 $FG\cong 1_{\mathbf{D}}$，$GF\cong 1_{\mathbf{C}}$ 时，则 F，G 均为忠实完全函子[7]. 这里 $\cong$ 表自然同构.

引理 2　对 $\mathbf{C}\to\mathbf{D}$ 的忠实完全函子 F 及 $f\in\mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(A,B)$，若 $F(f)$ 是单态射，满态射，有一截口，有保核收缩，是同构. 则 f 也有相应的性质.

定理 2　设 **C** 为因式分解范畴，则与 **C** 等价的范畴均为因式分解范畴，从而因式分解范畴的等价分类相容.

证明　设范畴 **C** 与 **D** 等价，则存在 $\mathbf{C}\to\mathbf{D}$ 的函子 F，$\mathbf{D}\to\mathbf{C}$ 的函子 G，使得 $FG\cong 1_{\mathbf{D}}$，$GF\cong 1_{\mathbf{C}}$. 对 D 中态射 $g:A'\to B'$，下图可换

$$\mathbf{D}\qquad\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\eta_{A'}"] \arrow[d, "g"'] & FGA' \arrow[d, "FG(g)"] \\ B' \arrow[r, "\eta_{B'}"'] & FGB' \end{tikzcd}$$

及图

$$\mathbf{C}\qquad\begin{tikzcd} & GA' \arrow[dl, "\varphi_1"'] \arrow[dd, "G(g)"] \\ C \arrow[dr, "\varphi_2"'] & \\ & GB' \end{tikzcd}\qquad\qquad \mathbf{D}\qquad\begin{tikzcd} FGA' \arrow[dr, "F\varphi_1"] \arrow[dd, "FG(g)"'] & \\ & FC \arrow[dl, "F\varphi_2"] \\ FGB' & \end{tikzcd}$$

其中 (φ_1,C,φ_2) 为 $G(g)$ 的标准分解. 由 F 为共变函子知，$(F\varphi_1,FC,F\varphi_2)$ 为 $FG(g)$ 的一个分解，$\eta_{A'}$，$\eta_{B'}$ 为同构，故上图可换. 由上图可换得：

$$g=\eta_{B'}^{-1}FG(g)\eta_{A'}=(\eta_{B'}^{-1}F\varphi_2)(F\varphi_1\eta_{A'}).$$

由 $GF\cong 1_{\mathbf{C}}$ 和下图可换

$$
\begin{tikzcd}
GA' \arrow[r, "\eta_{GA'}"] \arrow[d, "G(g)"'] & GFGA' \arrow[d, "GFG(g)"] \\
GB' \arrow[r, "\eta_{GB'}"'] & GFGB'
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& GA' \arrow[dl, "\varphi_1"'] \arrow[dd, "G(g)"] \\
C \arrow[dr, "\varphi_2"'] & \\
& GB'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& FGA' \arrow[dl, "F\varphi_1"'] \arrow[dd, "FG(g)"] \\
FC \arrow[dr, "F\varphi_2"'] & \\
& FGB'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& GFGA' \arrow[dl, "GF\varphi_1"'] \arrow[dd] \\
GFC \arrow[dr, "GF\varphi_2"'] & \\
& GFGB'
\end{tikzcd}
$$

得下面图可换

$$
\begin{tikzcd}
GA' \arrow[r, "\eta_{GA'}"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & GFGA' \arrow[d, "GF\varphi_1"] \\
C \arrow[r, "\eta_C"'] & GFC
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & GFC \arrow[d, "GF\varphi_2"] \\
GB' \arrow[r, "\eta_{GB'}"'] & GFGB'
\end{tikzcd}
$$

由上两图可换得 $GF\varphi_1=\eta_C\varphi_1\eta_{GA'}^{-1}$；$GF\varphi_2=\eta_{GB'}\varphi_2\eta_C^{-1}$. 由 φ_1 是满态射知 $GF\varphi_1=G(F\varphi_1)$是满态射. 由 φ_2 是单态射知 $GF\varphi_2=G(F\varphi_2)$是单态射.

根据引理 1,引理 2 知 $F\varphi_1$ 是满态射,$F\varphi_2$ 是单态射,因而 $F\varphi_1\eta_{A'}$ 仍为满态射,$\eta_{B'}^{-1}F\varphi_2$ 仍为单态射,从而$(F\varphi_1\eta_{A'},FC,\eta_{B'}^{-1}F\varphi_2)$是 g 的一个标准分解.

推论 设 **C** 为因式分解范畴,F 为 **C**→**D** 的忠实完全函子,若对$\forall A'\in$ ob **D**,存在 $A\in$ ob **C**,使得 A'与 FA 同构,则 **D** 是因式分解范畴.

事实上当条件满足时,**C** 与 **D** 等价,由上述定理知 **D** 为因式分解范畴.

此时,定理 1 即为此推论的直接结果.

下面给出同一态射 $\varphi:C\to B$ 的两个标准分解之间的关系.

定理 3 设 $\varphi:C\to B$ 的两个标准分解为:(g_1,A_1,f_1),(g_2,A_2,f_2)且(D,h_1,h_2)是 f_1,f_2 的一个拉回,则:

1) 存在唯一的 $K:C\to D$ 使得 $g_1=h_1K,g_2=h_2K$;

2) h_1,h_2 仍为满态射;

3) (h_1,A_1,f_1),(h_2,A_2,f_2)是 D 到 B 的某态射的标准分解.

对称地有,设(H_1,l_1,l_2)是 g_1,g_2 的一个推出,则 1)存在唯一的态射 $K:H\to B$ 使得 $f_1=kl_1,f_2=kl_2$; 2)l_1,l_2 仍为单态射; 3)(g_1,A_1,l_1)及(g_2,A_2,l_2)是 C 到 H 的某态射的标准分解.

作为上述定理的应用,熟知:

引理 1[6] 令 $f_i:M_i\to B$ 在 **R**-mod 范畴中,M 为 $M_1\times M_2$ 的子集,$M=\{(a_1,a_2)\mid f_1(a_1)=f_2(a_2),a_i\in M_i,i=1,2\}$. $\forall r\in R,r(a_1,a_2)=(ra_1,ra_2)$,则有 M 作成 $M_1\times M_2$ 的子模,令 $p_i:M_1\times M_2\to M_i$ 表投射,则 $m_i=p_i|_M$ 是 M 到 M_i 的模同态. 此时,(M,p_1p_2)为 f_1,f_2 的一个拉回.

以下矩阵均为复数域 C 上的矩阵.

定理 4 ${}_mA_n$ 的任意两个满秩分解 ${}_mA_n={}_mG_{1_r}{}_rH_{1_n}={}_mG_{2_r}{}_rH_{2_n}$,有只由 G_1,G_2 决定的行满秩阵 P_1,P_2,使得 $H_2=P_2K,H_1=P_1K$,且对任意满秩分解等式 ${}_mG_{2_r}{}_rH'_{2_n}={}_mG_{1_r}{}_rH'_{1_n}$ 均有 $H'_2=$

$P_2K', H'_1=P_1K'$. 此时,K, K'分别由$\{H_1, H_2\}$,$\{H'_1, H'_2\}$各自唯一确定.

证明 把复数域C上的向量空间看作是左C模;把G_1, G_2看成是V_r到V_m,W_r到V_m的线性变换(模同态),则有G_1, G_2为单态射,H_1, H_2看成是V_n到V_r,V_n到W_r的模同态,则H_1,H_2为满态射.

根据引理知,由V_r, W_r所产生的C-向量空间M,仍是有限维向量空间,此时(M, P_1, P_2)便是G_1和G_2的一个拉回.这里P_1, P_2为投射$p_i|_M, i=1,2$的相应的变换矩阵.由定理3知:P_1,P_2为行满秩阵,且$H_1=P_1K, H_2=P_2K$,K由$\{H_1, H_2\}$唯一确定.

由于(M, P_1, P_2)是G_1和G_2的一个拉回,故当$G_2H'_2=G_1H'_1$时,存在K',使得$H'_1=P_1K'$,$H'_2=P_2K'$,K'由$\{H'_1, H'_2\}$唯一确定. □

对称地有:

定理 5 ${}_mA_n={}_mG_{1_r}{}_rH_{1_n}={}_mG_{2_r}{}_rH_{2_n}$,${}_sG'_{1_r}{}_rH_{1_n}={}_sG'_{2_r}{}_rH_{2_n}$,秩$G_i=$秩$H_j=$秩$G'_k=r, i, j, k=1$,2则有$G_2=KN_2$, $G_1=KN_1$;$G'_2=K'N_2$, $G'_1=K'N_1$,N_1, N_2为列满秩阵,K由G_1, G_2唯一确定;K'由G'_1, G'_2唯一确定.

事实上,只须利用推论和定理3即可.

感谢周伯埙教授、佟文廷教授和江声远教授的指导和帮助.

参 考 文 献

[1] D. L. Davis and D. W. Robinson, Linear Algebra and Appl., 5(1972), 319—328.

[2] 江声远, 因式分解广义逆, 数学研究与评论, Vol. 11, No. 3, 1991.

[3] 庄瓦金, 范畴中态射的广义逆, 数学学报, 31:1(1980), 39—45.

[4] R. Puystjens and D. W. Robinson, *The Moore-Penrose inverse of a morphism with factorization*, Linear Algebra Appl., 40(1981), 129—141.

[5] N. Jacoboson, *Basic Algebra* 2, Freeman, San Francisco, 1974.

[6] Frank W. Anderson and Kent R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag New York, Heidelberg, Berlin.

[7] Bodo Parieigis, *Categories and Functors*, New York, London, 1970.

[8] 李桃生, Abel 范畴中态射的 Moore-Penrose 逆, 华中师大学报, 26:3(1992), 265—269.

Category with Factorization

Feng Lianggui

(Dept. of Math., Nanjing University, 210008)

Abstract

It is shown that a category with factorization is also a category with factorization under the relation of equivalence.