第16卷第2期 数学研究与评论 Vol. 16 No. 2
1996年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1996

加性泛函簇的共鸣定理*

刘 佳 罗跃虎
(山西大学数学系，太原 030006)

摘 要 给出拓扑线性空间上的加性泛函簇的共鸣定理，推广了已知的有关结果.

关键词 加性泛函，共鸣定理，拓扑加群，拓扑线性空间.
分类号 AMS(1991) 46A/CCL O177.3

共鸣定理是泛函分析中最基本的定理之一，由于它在理论上和实际中有着广泛而重要的应用，因而得到不同形式的拓广. 近来文[6]讨论了 k-半拟次加泛函簇的共鸣定理，而文[4]通过在 X 上引入 F 性泛函，对其中的一类重要泛函——加性泛函给出了共鸣定理，这些结果自然以 k-半拟次加泛等的结果为特例，然而还有许多有关(k-半)拟次加泛函的结果有待拓广. 本文通过引入加型二纲集的概念，给出了加性泛函簇的共鸣定理，此结果包括了拟次加泛函的主要结果[3]为特例，同时也推广了[4]－[8]中的有关结果.

§1 定义和引理

沿用[4]中的记号和定义，即：设 X 为加群，$x\in X$，$x_\Lambda=\{x_l|l\in\Lambda\}\subset X$（$\Lambda$ 为给定的指标集），$E,F\subset X$，$E_\Lambda=\{E_l|l\in\Lambda\}$，$F_\Lambda=\{F_l|l\in\Lambda\}$ 为 X 的子集簇，f 为 X 上的泛函，$T=\{T_l|l\in\Lambda\}$ 为 X 上的泛函簇，记

$$f(E)=\{f(x)|x\in E\},\sup f(E)=\sup_{x\in E}f(x),$$

$$T(x)=\sup_{l\in\Lambda}T_l(x),T[x_\Lambda]=\sup_{l\in\Lambda}T_l(x_l),T_l[E]=\sup T_l(E),$$

$$T[E]=\sup_l T_l[E],T[E_\Lambda]=\sup_l T_l[E_l];$$

$$E\pm F=\{x\pm y|x\in E,y\in F\},E_\Lambda\pm F_\Lambda=\{E_l\pm F_l|l\in\Lambda\},$$

$$E_\Lambda\pm E=\{E_l\pm E|l\in\Lambda\},$$

$x_\Lambda\in E_\Lambda$ 当且仅当 $x_l\in E_l,\forall\, l\in\Lambda$；对加法群 X，记

$$\mathrm{span}^+E=\bigcup_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}E\ (\sum_{k=1}^{n}E=\overbrace{E+E+\cdots+E}^{n\uparrow}),$$

$$\mathrm{span}^+E_\Lambda=\{y^n_\Lambda|y^n_\Lambda\in\sum_{k=1}^{n}E_\Lambda,n=1,2,\cdots\},$$

对线性空间 X，记

* 1993年12月15日收到. 国家自然科学基金、山西省自然科学基金和山西省青年科学基金资助课题.

$$\mathrm{span}_+ E=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{\substack{\lambda_k>0\\1\leqslant k\leqslant n}}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k E,\ \mathrm{span}_+ E_\Lambda=\{y^n_\Lambda \mid y^n_\Lambda\in\bigcup_{\substack{\lambda_k>0\\1\leqslant k\leqslant n}}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k E_\Lambda,n=1,2\cdots\},$$

$$\lambda E_\Lambda=\{\lambda E_l \mid l\in\Lambda\},E_\Lambda\cup F_\Lambda=\{E_l\cup F_l \mid l\in\Lambda\}.$$

定义 1.1　设 X 为加群，$Q\subset X$，$T=\{T_l \mid l\in\Lambda\}$ 为 X 上的泛函簇. 如果 $X=\mathrm{span}^+Q$，则称 Q 为 X 中的吸收集[2]；如果对任何集簇 E_Λ，$T[E_\Lambda]<+\infty$ 蕴含 $T[E_\Lambda+E_\Lambda]<+\infty$，则称 T 为 X 上的加性泛函簇[4]，特别地若 $T=\{f\}$ 仅含一个泛函，则称 f 为 X 上的加性泛函.

由定义显然有关系式

广义拟次加泛函簇[3]⇒广义 k-半拟次加泛函簇[6]⇒广义按 φ 二元严格增泛函簇[5]⇒加性泛函簇.

定义 1.2　设 X 为拓扑加群，$Q\subset X$. 如果对满足条件：

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=\mathrm{span}^+Q,E_{n+1}\supset(E_n+E_n)\cup E_n,\quad n=1,2,\cdots \tag{1.1}$$

的集列都存在某个 n_0 使 $\overset{0}{E}_{n_0}\neq\varnothing$，则称 Q 是加型第二纲集；若 $X=Q$ 为加型第二纲集，则称 X 是加型第二纲拓扑群.

显然加型第二纲空间就是[2,4]中定义的 $z_{(1,1)}$ 空间，且该空间中的吸收集都是加型二纲集.

下面两个命题不难由定义得到：

命题 1.1　设 X 是拓扑加群，Q 是 X 中的加型第二纲集，则 X 的任何包含 Q 的子集 A 都是加型第二纲的.

命题 1.2　设 X 为加群，$T=\{T_l \mid l\in\Lambda\}$ 为 X 上的加性泛函簇，那么

(i)　若 $T[E^k_\Lambda]<+\infty,k=1,2,\cdots,n$，则有 $T[\sum_{k=1}^{n}E^k_\Lambda]<+\infty$；

(ii)　若 $\forall\, x_\Lambda\in E^k_\Lambda$ 都有 $T[x_\Lambda]<+\infty,k=1,2,\cdots,n$，则有

$$T[\sum_{k=1}^{n}x^k_\Lambda]<+\infty,\forall\, x_\Lambda\in E^k_\Lambda,k=1,2,\cdots,n.$$

命题 1.3　设 X 是拓扑加群，$T=\{T_l \mid l\in\Lambda\}$ 为 X 上的加性泛函簇，则下面三条结论等价：

(H_1)　存在原点的邻域簇 $U_\Lambda=\{U_l \mid l\in\Lambda\}$ 使 $T[U_\Lambda]<+\infty$.

(H_2)　存在开集簇 $O_\Lambda=\{O_l \mid l\in\Lambda\}$ 及点集 $x_\Lambda=\{x_l \mid l\in\Lambda\}\in O_\Lambda$ 使 $T[O_\Lambda]<+\infty$，$T[-x_\Lambda]<+\infty$.

(H_3)　存在开集簇 $O_\Lambda=\{O_l \mid l_\Lambda\}$ 及点集 $x_\Lambda=\{x_l \mid l\in\Lambda\}\in\mathrm{span}^+O_\Lambda$ 使 $T[O_\Lambda]<+\infty$，$T[-x_\Lambda]<+\infty$.

证明　(H_1)⇒(H_2)⇒(H_3) 显然成立.

(H_3)⇒(H_1)　由 $x_\Lambda\in\mathrm{span}^+O_\Lambda$ 知存在 n 使 $x_\Lambda\in\sum_{k=1}^{n}O_\Lambda$，由命题 1.2 可得 $T[\sum_{k=1}^{n}O_\Lambda-x_\Lambda]<+\infty$，注意到对每个 $l\in\Lambda$，原点 $\theta\in\sum_{k=1}^{n}O_\Lambda-x_\Lambda$，从而 $\sum_{k=1}^{n}O_\Lambda-x_\Lambda$ 为原点的邻域簇.

引理 1.1　设 X 是拓扑线性空间，$T=\{T_l \mid l\in\Lambda\}$ 为 X 上的加性泛函簇，下面两条等价：

(i) 存在原点的对称邻域 U 使 $T[U]<+\infty$(相应地 $T(x)<+\infty, \forall x\in U$).

(ii) 存在开集 O 和 $x_0\in \mathrm{span}_+ O$ 使 $T[O]<+\infty, T(-x_0)<+\infty$(相应地, $T(x)<+\infty, \forall x\in 0$ 且 $T(-x_0)<+\infty$).

证明 (i)⇒(ii) 显然成显. 下证(ii)⇒(i).

设 $x_0=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k, \lambda_k>0, x_k\in O$. 因 $\lim_{n\to\infty}\frac{n\lambda_k}{[n\lambda_k]}=1$, 故存在自然数 l 使 $\frac{l\lambda_k}{[l\lambda_k]}x_k\in O$. 那么当令 $m=\sum_{k=1}^{n}[l\lambda_k]$ 时就有 $lx_0=\sum_{k=1}^{n}[l\lambda_k]\frac{l\lambda_k}{[l\lambda_k]}x_k\in\sum_{k=1}^{m}O$. 由命题 1.2 知 $T(-mx_0)<+\infty$, $T[\sum_{k=1}^{l}O]<+\infty$, 那么由命题 2 可知(i) 成立.

附注 1.1 当 X 是拓扑加群时, 将(ii) 中的 $x_0\in\mathrm{span}_+ O$ 换为 $x_0\in\mathrm{span}^+ O$, 则引理 1.1 的结论仍成立.

定义 3[6] 设 $T=\{T_l|l\in\Lambda\}$ 为拓扑空间 X 上的泛函簇. 若存在趋于 $+\infty$ 的数列 $\{a_n\}$ 使得集合

$$A_n=\{x\in X|T(x)\leqslant a_n\},\quad n=1,2,\cdots \tag{1.2}$$

都是闭的, 则称 T 是在 X 上一致拟下半连续的.

显然, 当 T 中的每个泛函都在 X 上下半连续时, T 是一致拟下半连续的. 反之不然.

引理 1.2 设 $T=\{T_l|l\in\Lambda\}$ 是在拓扑加群 X 上一致拟下半连续的加性泛函簇, 若存在 X 中的加型第二纲集 Q 使得: $T(x)<+\infty, \forall x\in Q$, 则存在 X 中的开集 O 使 $T[O]<+\infty$ 且 $O\subset\overline{\mathrm{span}^+ Q}$.

证明 记 $A=\{x\in X|T(x)<+\infty\}, B=\mathrm{span}Q$, 由命题 1.2 知 $A=\mathrm{span}^+A\supset B\supset Q$, 因而 $C=\mathrm{span}A\cap\overline{B}\supset Q$. 由命题 1.1 知 C 是加型第二纲的. 不难验证 $\overline{B}+\overline{B}\subset\overline{B}$, 从而可知 $\mathrm{span}\overline{B}=\overline{B}$. 因此 $C=\mathrm{span}C$. 设 $\{A_n\}$ 由(1.2) 式定义, 记 $E_1=A_1\cap\overline{B}, E_{n+1}=E_n\cup(E_n+E_n)\cup(A_n\cap\overline{B}), n=1,2,\cdots$, 易知 $E_n\subset C, T[E_n]<+\infty, n=1,2,\cdots$ 且 $\mathrm{span}C=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$. 由 C 的加型二纲性知存在 n_0 使 $\varnothing\neq\overset{0}{\overline{E}}_{n_0}\subset C\subset\overline{B}=\overline{\mathrm{span}^+ Q}$.

§2 共鸣定理

设 X 为拓扑加群, $T=\{T_l|l\in\Lambda\}$ 为 X 上的加性泛函簇, 下面七个结论间的关系是本节要讨论的.

(R_1) 存在原点的对称邻域 U 使 $T(U)<+\infty$.

(R_2) 存在开的加型二纲集 O 及 $x_0\in\mathrm{span}^+ O$ 使得下面的(2.1) 式在 O 上成立:

$$T(x)<+\infty, \tag{2.1}$$

且

$$T(-x_0)<+\infty. \tag{2.2}$$

(R_3) 存在开集 O 和在 O 中稠密的加型第二纲集 Q 及 $x_0\in\mathrm{span}^+ O$ 使得(2.1) 式在 Q 上成立且(2.2) 式成立.

(R_4)　存在加型二纲集 Q 和在 Q 中稠密的集合 Q_1 及自然数 m_0 使(2.1)式在 $Q\cup\{-m_0Q\}$ 上成立.

(R_5)　存在自然数 m_0 使得集合 $E=\{x\in X|T(x)<+\infty,T(-m_0x)<+\infty\}$ 为加型第二纲的;

(R_6)　存在点集 $y_A=\{y_l|l\in A\}\subset X$ 和自然数 m_0 使得集合 $F=\{x\in X|T[y_A+x]<+\infty,T[y_A-m_0x]<+\infty\}$ 为加型第二纲的且 $T[-y_A]<+\infty$.

(R_7)　设 $A=N$ 为自然数集,存在收敛于零点的点列 $y_A=\{y_n|n=1,2,\cdots\}$ 和自然数 m_0 使集合 $E=\{x\in X|T[y_A+x]<+\infty,T[y_A-m_0x]$ 为加型第二纲的.

定理 2.1　$X,T=\{T_l|l\in A\}$ 同前所设,且命题 1.3 中的(H_1)成立,则有关系

$$\begin{array}{c}(R_1)\\ \nearrow\\ (R_6)\Leftrightarrow(R_5)\Leftrightarrow(R_4)\Rightarrow(R_2)\Rightarrow(R_3)\end{array}$$

当 X 中原点的任何邻域都吸收时$(R_3)\Rightarrow(R_4)$,当(R_1)中的 U 是加型第二纲的,则有

$$(R_1)\Rightarrow(R_2)\sim(R_6).$$

证明　$(R_5)\Rightarrow(R_4)$,$(R_2)\Rightarrow(R_3)$ 是显然的.

$(R_6)\Rightarrow(R_5)$　对任何 $x\in X$,当 $T[y_A+x]<+\infty$ 时,由命题 1.2 知 $T(x)=T[y_A+x-y_A]<+\infty$,因此有 $F\subset E$. 所以$(R_6)\Rightarrow(R_5)$成立. 则 $\theta=m_0x-m_0x$ 可知$(R_5)\Rightarrow(R_6)$成立.

$(R_5)\Rightarrow(R_3)$　由于(2.1)式在 $E\cup\{-m_0E\}$ 上成立,故由命题 1.2 可知(2.1)式在 $\mathrm{span}^+E\cup\{-m_0\mathrm{span}^+E\}$ 上成立. 因 E 是第二纲的,故知 span^+E 也是第二纲的且 $\overline{\mathrm{span}^+E}\neq\varnothing$,因此$(R_4)\Rightarrow(R_3)$成立.

$(R_4)\Rightarrow(R_1)$,(R_6)　对每个自然数 n,记 $Q_n=\{x\in\mathrm{span}^+Q|T(x)\leqslant n\}$,令 $E_1=Q_1$,$E_{n+1}=E_n\cup(E_n+E_n)\cup Q_n$,$n=1,2,\cdots$,因 Q 的二纲性和命题 1.2 可知存在 n_0 使得 $O_1=\overset{0}{E}_{n_0}\neq\varnothing$ 且 $T[E_{n_0}]<+\infty$. 因 $T[U_A]<+\infty$,再由命题 1.2 有:

$$T[U_A+E_{n_0}]<+\infty. \tag{2.3}$$

对每个 $l\in A$,由[4]§5 引理 1 有 $E_{n_0}+U_l=O_1+U_l\supset O_1$,故由(2.3)式就有:

$$T[O_1]<+\infty. \tag{2.4}$$

因 $O_1\subset\overline{\mathrm{span}^+Q}\subset\overline{\mathrm{span}Q_1}$,故存在 $x_0\in O_1$ 使 $x_0\in\mathrm{span}^+Q_1$. 因此 $T(-m_0x)<+\infty$. 于是由引理 1.1 知$(R_4)\Rightarrow(R_1)$成立. 设 U 是原点的邻域且 $T[U]<+\infty$,则有

$$T(x)<+\infty,\forall x\in(U+Q)\cup\{-m_0(U+Q_1)\}.$$

注意到 $Q+U$ 是开的加型第二纲集,且 $Q_1+U=Q+U$ 及 $T(\theta)<+\infty$,则可知$(R_4)\Rightarrow(R_1)$,(R_2),(R_6)成立.

当原点的每个邻域都吸收且(R_3)成立时,首先由$(R_4)\Rightarrow(R_1)$的证明知存在开集 $O_1\subset\overline{\mathrm{span}Q}$ 使(2.4)成立. 取 $y_0\in O_1$,由 span^+O-x_0 的吸收性知存在 l_0 使 $l_1x_0-y_0\in\mathrm{span}^+O$,又注意到 $\overline{Q}\supset O$,故有

$$\varnothing\neq(l_0x_0-O_1)\cap\mathrm{span}^+O\subset\overline{\mathrm{span}Q},$$

因此存在 $y_1\in O_1$ 使 $T(l_0x_0-y_1)<+\infty$,记 $z_0=y_1-l_0x_0$,$O_2=O_1-l_0x_0$,则 $T(-z_0)<+\infty$,且由(2.4),(2.2)式知 $T[O_2]<+\infty$. 于是由引理 1.1 知(R_1)成立,那么由原点邻域的吸收性,则可知在 X 上成立(2.1). 注意到此时 X 是加型第二纲的,因此(R_4)成立.

定理的最后一个结论显然成立.

推论 2.1 当定理 2.1 中的 X 为加型第二纲拓扑群且原点的每个邻域都吸收时,则$(R_1)\sim(R_6)$ 都等价. 特别地,当 X 为(加型)第二纲拓扑线性空间时,$(R_1)\sim(R_6)$ 都等价.

推论 2.2 设 $T=\{T_l\mid l\in\Lambda$ 是拓扑加群 X 上的一致拟下半连续的泛函簇,则

$$(R_6)\Leftrightarrow(R_5)\Leftrightarrow(R_4)\Rightarrow(R_1),(R_2),(R_3).$$

当 X 原点的每个邻域都吸收时,$(R_3)\Rightarrow(R_4)$;当(R_1) 中的 U 为加型二纲集时,$(R_1)\Rightarrow(R_2)\sim(R_6)$.

证明 从定理 2.1 的证明可知$(R_6)\Leftrightarrow(R_5)\Rightarrow(R_4)$. 当$(R_4)$ 成立时,由引理 1.2 易知命题 1.3 中的(H_2) 成立. 从而由定理 2.1 可知$(R_4)\Rightarrow(R_5),(R_1),(R_2),(R_3)$.

当原点的每个邻域都吸收且(R_3) 成立时,由引理 1.2 知存在开集 $O_1\subset \mathrm{span}Q$ 使(2.4)式成立,于是重复定理 2.1 中$(R_3)\Rightarrow(R_4)$ 后一部分的证明可知 $R_3\Rightarrow R_4$ 成立;其余的结论显然成立.

定理 2.2 设 $T_\Lambda=\{T_n\mid n=1,2,\cdots\}$ 为拓扑加群 X 上的加性泛函簇,且存在原点的邻域簇 $U_\Lambda=\{U_n\mid n=1,2,\cdots\}$ 使 $T[U_\Lambda]<+\infty$,则有关系式:$(R_5)\Rightarrow(R_7)\Rightarrow(R_1)$.

证明 $(R_5)\Rightarrow(R_1)$ 显然成立.

$(R_7)\Rightarrow(R_1)$ 类似于$(R_4)\Rightarrow(R_1)$ 中(2.4)式的证明知存在开集 $O_1\neq\varnothing$ 和在 O_1 中稠密的集合 E_{n_0} 使得

$$T[y_\Lambda+E_{n_0}]<+\infty,T[y_\Lambda-m_0E_{n_0}]<+\infty. \tag{2.5}$$

取 $z_0\in O_1$,则存在原点的对称邻域 V 使

$$z_0+V+V\subset O_1. \tag{2.6}$$

因 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\theta$,故存在自然数 l_0,使当 $n>l_0$ 时,$y_n,2y_n\in V$. 由假设知对每个 n 有 $T_n[U_n]<+\infty$,取

$$U=(\bigcap_{k=1}^{l_0}U_n\cap(-U_n)\cap V,$$

则 U 为原点的对称邻域. 对任何 $x\in U$ 及自然数 n,当 $n\leqslant l_0$ 时,$T_n(x)\leqslant T_n[U]\leqslant T_1[U_1]$. 当 $n>m_0$ 时,由(2.6)式,并注意利用[4]§5 引理 1 就有:

$$\begin{aligned}x&=y_n+(x-2y_n+z_0)+\sum_{k=2}^{m_0}(y_n-y_n+z_0)+y_n-m_0z_0\in\sum_{k=1}^{m_0}(y_n+O_1)\\&\quad+y_n-m_0O_1\subset\sum_{k=1}^{m_0}(y_n+O_1)+y_n-m_0O_1+U_n\\&=\sum_{k=1}^{m_0}(y_n+E_{n_0})+y_0-m_0E_{n_0}+U_n.\end{aligned}$$

由(2.5)式和命题 1.2,就有

$$T_n(x)\leqslant T[\sum_{k=1}^{n}(y_\Lambda+E_{n_0})+(y_\Lambda-mE_\Lambda)+U_\Lambda]\stackrel{\triangle}{=}M_1<+\infty,$$

因此 $T(x)\leqslant\max\{T_1[U_1],M_1\},\forall\, x\in U$.

附注 2.1 当 X 是线性拓扑空间时,则$(R_2),(R_3)$ 中的“$x_0\in \mathrm{span}^+Q$”可换为“$x_0\in \mathrm{span}_+Q$”,$(R_4),(R_5),(R_6)$ 中的“自然数 $m_0>0$”可换为“$\lambda_0>0$”.

附注 2.2 定理 2.1,推论 2.1,推论 2.2 是文[3,4,5,7,8]等中相应结果的推广;当文[6]定理 2 中的 G 不是第二纲空间时,该文定理 2 中的(ii)恒成立.换言之,此时该文定理 2 的(i),(ii)可以同时成立.而定理 2.2 在当空间为第二纲的条件下,去掉了文[6]定理 2 中要求有运算 $x \to \frac{1}{2}x$ 且该运算连续的条件.

附注 2.3 文[2]和本文所讨论问题的性质不同.文[2]是讨论加性泛函簇 T 在吸收集一致有界则必局部一致有界的特征,并没有给出使泛函簇在吸收集上一致有界的条件.而本文则是给出了使泛函簇 T 局部一致有界的条件 —— 即共鸣定理成立的条件.

参 考 文 献

[1] A.E.Taylor, *Introduction to Functional Analysis*, New York, 1958.

[2] Xuan Hengnong, *Uniform boundedress principle for a family of F-functional*, Northeastern Math. J., 8:1(1992), 69—76.

[3] 定光桂，巴拿赫空间引论，科学出版社，1984.

[4] 宣恒农，一个一般形式的一致有界原理，数学学报，34(1991)，131—137.

[5] 卢广存，一类非线性算子簇的共鸣定理，数学杂志，11:2(1991)，156—160.

[6] 宋继生、李虹，关于共鸣定理，数学学报，31:2(1988)，192—200.

[7] 罗跃虎，线性拓扑空间中两类泛函簇的共鸣定理，山西大学学报，6:2(1983)，1—7(Zbl. Math. 642, 47056).

[8] 范 达，关于拓扑线性空间中两类算子的共鸣定理，中山大学学报(自)，1(1983)，56—64.

[9] 定光桂，关于拟次加泛函的一些性质，数学学报，25:4(1982)，410—418.

Resoance Theorems for the Family of Additive Functionals

Liu Jia *Luo Yuehu*

(Dept. of Math., Shanxi University, Taiyuan 030006)

Abstract

Some resoance theorems for the family of non-linear functionals additivity functionals in topolagical additive group are proved.

Keywords resoance theorem, additivity functional, topological additivity group, topological linear space.