共振情形下次线性椭圆偏微分方程的解*

韩志清

(青岛大学数学系, 266071)

摘　要　研究了共振下的微分方程 $\Delta u+\lambda_1 u+g(x,u)=0, x\in\Omega; u|_{\partial\Omega}=0$. 在 $g(x,u)$ 关于 u 次线性的情形, 证明了解的存在性, 从而部分地回答了 Figueiredo and Massabi 的一个问题.

关键词　椭圆偏微分方程, 共振, Landesman-Lazer 条件.

分类号　AMS(1991) 35J15/CCL O175.25

§1　引　言

考虑如下问题

$$\begin{cases}\Delta u+\lambda_1 u+g(x,u)=0, & x\in\Omega,\\ u|_{\partial\Omega}=0,\end{cases}\tag{1.1}$$

其中 $\Omega\subset\mathbf{R}^N$ 是边界充分光滑的有界区域; λ_1 是 $-\Delta$ 在 Dirichlet 零边界条件的第一特征值, 对于特征子空间为 $\mathrm{span}\{\Psi(x)\}$, 其中 $\Psi(x)>0, \forall x\in\Omega$; $g(x,u)$ 满足 Caratheodory 条件, 即对 a.e., $x\in\Omega$, $g(x,\cdot)$ 连续, 对 $\forall u\in\mathbf{R}$, $g(\cdot,u)$ 可测且对任何 $U>0$, 存在 $\alpha_U(x)\in L^2(\Omega)$ 使 $|g(x,u)|\le\alpha_U(x), \forall |u|\le U$.

条件(g)　$g(\cdot,\cdot):\Omega\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 满足 Caratheodory 条件且存在 $b(x)\in L^2(\Omega)$, $c\ge0$, $0\le\alpha<(N+2)/(N-2)$ 使 $|g(x,u)|\le c|u|^\alpha+b(x)$.

记 $G(x,s)=\int_0^s g(x,\xi)d\xi$ 且令

$$\Gamma_+(x)=\overline{\lim_{s\to+\infty}}\frac{G(x,s)}{s},\quad \gamma_+(x)=\underline{\lim_{s\to+\infty}}\frac{G(x,s)}{s},$$

$$\Gamma_-(x)=\overline{\lim_{s\to-\infty}}\frac{G(x,s)}{s},\quad \gamma_-(x)=\underline{\lim_{s\to-\infty}}\frac{G(x,s)}{s},$$

假设以上所有极限关于 $x\in\Omega$ 是一致的.

Figueiredo, Massabó[1] 获得的两个结果可如下叙述:

定理A　设(i) $g(x,s)$ 满足条件(g), 其中 $0\le\alpha<\frac{1}{2}$; (ii) $\Gamma_-(x), \gamma_+(x)\in L^r(\Omega)$, $r>\frac{N}{2}$ 且 $\int_\Omega\Gamma_-(x)\Psi(x)dx<0<\int_\Omega\gamma_+(x)\Psi(x)dx$, 则(1.1) 在 $H_0^1(\Omega)$ 中至少有一解.

* 1994年1月3日收到

定理B 设(i) $g(x,s)$ 满足条件(g), 其中 $0 \le \alpha < \frac{N+2}{N-2}$; (ii) $\Gamma_+(x), \gamma_-(x) \in L^r(\Omega)$, $r > \frac{N}{2}$ 且 $\int_\Omega \Gamma_+(x)\Psi(x)dx < 0 < \int_\Omega \gamma_-(x)\Psi(x)dx$, 则(1.1) 在 $H_0^1(\Omega)$ 中至少有一解.

由于在 $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$ 时, Figueiredo, Massabò没能证明(1.1) 相应泛函的 P.S. 条件, [1] 提出了定理A 对 $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$ 是否还正确这一问题. 本文在一定条件下部分回答了这个问题.

由条件(g) 知, 下列极限的引进似乎更有意义:

$$\Gamma_{+,\alpha}(x) = \overline{\lim_{s\to+\infty}} \frac{G(x,s)}{s\cdot|s|^\alpha}, \quad \gamma_{+,\alpha}(x) = \underline{\lim_{s\to+\infty}} \frac{G(x,s)}{s\cdot|s|^\alpha},$$

$$\Gamma_{-,\alpha}(x) = \overline{\lim_{s\to-\infty}} \frac{G(x,s)}{s\cdot|s|^\alpha}, \quad \gamma_{-,\alpha}(x) = \underline{\lim_{s\to-\infty}} \frac{G(x,s)}{s\cdot|s|^\alpha},$$

其中假设以上极限关于 $x \in \Omega$ 是一致的.

本文证明了

定理1.1 设(i) $g(x,s)$ 满足条件(g), 其中 $0 \le \alpha < 1$; (ii) $\Gamma_{-,\alpha}(x), \gamma_{+,\alpha}(x) \in L^1(\Omega)$ 且 $\int_\Omega \Gamma_{-,\alpha}(x)\Psi^{1+\alpha}(x)dx < 0 < \int_\Omega \gamma_{+,\alpha}(x)\Psi^{1+\alpha}(x)dx$, 则(1.1) 在 $H_0^1(\Omega)$ 中至少有一个解.

定理1.2 设(i) $g(x,s)$ 满足条件(g), 其中 $0 \le \alpha < 1$, (ii) $\Gamma_{+,\alpha}(x) \in L^1(\Omega)$, $\gamma_{-,\alpha}(x) \in L^1(\Omega)$ 且 $\int_\Omega \Gamma_{+,\alpha}(x)\Psi^{1+\alpha}(x)dx < 0 < \int_\Omega \gamma_{-,\alpha}(x)\Psi^{1+\alpha}(x)dx$, 则(1.1) 在 $H_0^1(\Omega)$ 中至少有一个解.

关于(1.1) 的研究, 自 Landesman-Lazer[2] 的开创性工作以来有众多的研究, 可见[3]、[4]、[5]、[6] 及所附参考文献.

§2 定 理 的 证 明

记 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < \cdots$ 为 $-\Delta$ 在Dirichlet 零边界条件下所有特征值, 则 $H_0^1(\Omega)$ 可分解为 $H_0^1(\Omega) = H^0 \oplus \tilde{H}$, 其中 $H^0 = \operatorname{span}\{\Psi(x)\}$, $\tilde{H}$ 为 H^0 的补空间. 从而任一 $u(x) \in H_0^1(\Omega)$ 可表成: $u(x) = u^0(x) + \tilde{u}(x)$ 且有以下不等式

$$\int_\Omega |\nabla \tilde{u}(x)|^2 dx \ge \lambda_2 \int_\Omega |\tilde{u}(x)|^2 dx. \tag{2.1}$$

在以下推导中 c 表示常数, $c(\epsilon)$ 表示仅与 ϵ 有关的常数, $H_0^1(\Omega), L^p(\Omega), C(\overline{\Omega})$ 中范数分别表示为 $\|\cdot\|_{0,1}, \|\cdot\|_p, \|\cdot\|_c$.

定理1.1的证明 只须证 $\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega [|\nabla u(x)|^2 - \lambda_1 |u(x)|^2]dx - \int_\Omega G(x,u)dx$. 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有临界点即可[3],[4].

在已知条件下 $\Phi(u)$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 上的 C^1- 泛函且

$$\Phi'(u)v = \int_\Omega [\nabla u(x)\nabla v(x) - \lambda_1 u(x)v(x) - g(x,u)v(x)]dx. \tag{2.2}$$

首先验证在 $H_0^1(\Omega)$ 上 Φ 满足 P.S. 条件.

设 $\{u_n(x)\} \subset H_0^1(\Omega)$ 满足

$$\Phi'(u_n) \to 0 \ (H^{-1}(\Omega)), \ n \to \infty, \qquad (2.3)$$

$$|\Phi(u_n)| \le c. \qquad (2.4)$$

由(2.1), (2.2)并注意到 $u_n^0(x)$, $\widetilde{u}_n(x)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中正交性有

$$\begin{aligned}
\Phi'(u_n)\widetilde{u}_n &= \int_\Omega [\,|\nabla u_n(x)|\,|\nabla \widetilde{u}_n(x)| - \lambda_1 u_n(x)\widetilde{u}_n(x) - g(x,u_n)\widetilde{u}_n(x)\,]dx \\
&= \int_\Omega [\,|\nabla \widetilde{u}_n(x)|^2 - \lambda_1 |\widetilde{u}_n(x)|^2 - g(x,u_n)\widetilde{u}_n(x)\,]dx \\
&\ge (1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}) \int_\Omega |\nabla \widetilde{u}_n(x)|^2 dx - \int_\Omega |g(x,u_n)|\,|\widetilde{u}_n(x)|dx \\
&\ge (1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}) \int_\Omega |\nabla \widetilde{u}_n(x)|^2 dx - \int_\Omega [c|u_n|^\alpha + b(x)]\,|\widetilde{u}_n(x)|dx \\
&\ge (1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}) \int_\Omega |\nabla \widetilde{u}_n(x)|^2 dx - c_1\int_\Omega [\,|u_n^0|^\alpha + |\widetilde{u}_n|^\alpha + b(x)]\,|\widetilde{u}_n(x)|dx \\
&\ge (1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \epsilon) \int_\Omega |\nabla \widetilde{u}_n(x)|^2 dx - c_2(\epsilon) \int_\Omega |u_n^0|^\alpha |\widetilde{u}_n(x)|dx.
\end{aligned}$$

以上使用了不等式 $ab \le \epsilon a^p + c(\epsilon) b^q (a \ge 0, b \ge 0), p > 1, q = \frac{p}{p-1}$).

利用(2.3) 知有

$$\|\Phi'(u_n)\| \cdot \|\widetilde{u}_n\|_{0,1} \ge (1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \epsilon) \|\widetilde{u}_n\|_{0,1}^2 - c_2(\epsilon) \int_\Omega |u_n^0|^\alpha |\widetilde{u}_n| dx,$$

从而当 n 充分大时, 必存在 $c_3(\epsilon)$ 使

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{u}_n\|_{0,1}^2 &\le c_3(\epsilon) \int_\Omega |u_n^0|^\alpha |\widetilde{u}_n| dx \le \epsilon \int_\Omega |\widetilde{u}_n|^2 dx + c_4(\epsilon) \int_\Omega |u_n^0|^{2\alpha} dx \\
&\le \frac{\epsilon}{\lambda_2} \int_\Omega |\nabla \widetilde{u}_n|^2 dx + c_5(\epsilon) |t_n|^{2\alpha},
\end{aligned}$$

其中 $u_n^0 = t_n\psi$.

所以

$$\|\widetilde{u}_n\|_{0,1}^2 \le c_6(\epsilon) |t_n|^{2\alpha}. \qquad (2.5)$$

下面估计 $\int_\Omega [G(x,u_n) - G(x,u_n^0)]dx$.

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega [G(x,u_n) - G(x,u_n^0)]dx \\
&= \int_\Omega dx \int_0^1 g(x, u_n^0 + s\widetilde{u}_n)\widetilde{u}_n ds \\
&\le \int_\Omega dx \int_0^1 |\widetilde{u}_n|\,[c|u_n^0 + s\widetilde{u}_n|^\alpha + b(x)]ds \\
&\le \int_\Omega [c_7|\widetilde{u}_n|^{1+\alpha} + c_7|\widetilde{u}_n|\,|u_n^0|^\alpha + b(x)|\widetilde{u}_n|]dx,
\end{aligned}$$

其中使用了不等式 $(a+b)^\alpha \le 2^\alpha(a^\alpha + b^\alpha)$ $(a \ge 0, b \ge 0, \alpha \ge 0)$. 注意到不等式(2.1) 及Hölder 不等式有

$$\int_\Omega |\widetilde{u}_n|^{1+\alpha} dx \le c_8 \int_\Omega |\widetilde{u}_n|^2 dx \le c_9 \int_\Omega |\nabla \widetilde{u}_n|^2 dx \le c_{10} |t_n|^{2\alpha} \qquad ((2.5)\text{ 式}),$$

$$\int_\Omega |\widetilde{u}_n|\,|u_n^0|^\alpha dx \le \|u_n^0\|_c^\alpha \int_\Omega |\widetilde{u}_n| dx \le c_{11} \|u_n^0\|_c^\alpha \|\widetilde{u}_n\|_{0,1}$$

$$= c_{12}|t_n|^{\alpha}\|\widetilde{u}_n\|_{0,1} \le c_{13}|t_n|^{2\alpha} \qquad (\text{由}(2.5)\text{式}).$$

同理可证

$$\int_{\Omega}[b(x)|\widetilde{u}_n|]dx \le c_{14}|t_n|^{2\alpha}.$$

综上所证有

$$\int_{\Omega}|G(x,u_n) - G(x,u_n^0)|dx \le c_{15}|t_n|^{2\alpha}. \tag{2.6}$$

由(2.4)式有

$$\begin{aligned}
-c \le \Phi(u_n) &= \frac{1}{2}\int_{\Omega}[|\nabla u_n|^2 - \lambda_1|u_n|^2]dx - \int_{\Omega}G(x,u_n)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\Omega}[|\nabla \widetilde{u}_n|^2 - \lambda_1|\widetilde{u}_n|^2]dx - \int_{\Omega}G(x,u_n)dx \\
&\le \frac{1}{2}\|\widetilde{u}_n\|_{0,1}^2 - \int_{\Omega}[G(x,u_n) - G(x,u_n^0)]dx - \int_{\Omega}G(x,u_n^0)dx.
\end{aligned}$$

由(2.6)式知

$$-c \le c_{16}|t_n|^{2\alpha} - \int_{\Omega}G(x,t_n\Psi(x))dx. \tag{2.7}$$

下证在定理1.1的条件下$\{t_n\}$必是有界数列, 不然$\{t_n\}$必有子列收敛到∞. 不失一般性设$t_n \to \infty, n \to \infty$.

下设$t_n \to +\infty, n \to \infty$.

由定理1.1条件知$\int_{\Omega}\gamma_{+,\alpha}(x)\Psi^{1+\alpha}(x)dx > 0$, 从而

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{\Omega}G(x,t_n\Psi(x))dx}{t_n^{1+\alpha}} &= \lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}\frac{G(x,t_n\Psi(x))}{t_n\Psi(x)\cdot t_n^{\alpha}\Psi^{\alpha}(x)}\cdot\Psi^{1+\alpha}(x)dx \\
&\ge \int_{\Omega}\lim_{n\to\infty}\frac{G(x,t_n\Psi(x))}{t_n\Psi(x)\cdot t_n^{\alpha}\Psi^{\alpha}(x)}\cdot\Psi^{1+\alpha}(x)dx = \int_{\Omega}\gamma_{+,\alpha}(x)\Psi^{1+\alpha}(x)dx > 0.
\end{aligned}$$

因为

$$\frac{\int_{\Omega}G(x,t_n\Psi(x))dx}{t_n^{1+\alpha}} = \frac{\int_{\Omega}G(x,t_n\Psi(x))dx}{t_n^{2\alpha}}\cdot t_n^{\alpha-1},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{\Omega}G(x,t_n\Psi(x))dx}{t_n^{2\alpha}} = +\infty. \tag{2.8}$$

令$c^* = \max\{c, c_{16}\} + c$, 其中$c, c_{16}$同(2.7)式, 则当$n$充分大时

$$\int_{\Omega}G(x,t_n\Psi(x))dx > c^* t_n^{2\alpha} \ge (c_{16}+c)t_n^{2\alpha} \ge c_{16}t_n^{2\alpha} + c \quad (\text{设 } t_n \ge 1),$$

此显然与(2.7)发生矛盾.

由条件$\int_{\Omega}\Gamma_{-,\alpha}(x)\Psi^{1+\alpha}(x)dx < 0$知$t_n \to -\infty$也是不可能的(同理可证).

因此$\{t_n\}$不可能有子列收敛到$+\infty$, 也不可能有子列收敛到$-\infty$, 从而$\{t_n\}$必有界. 此即说明$\{\|u_n^0\|_{0,1}\}$有界, 进一步由(2.5)式还知$\{\|\widetilde{u}_n\|_{0,1}\}$有界, 因此$\{\|u_n\|_{0,1}\}$有界. 由标准的证法知

$\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中必有收敛子列，即说明 $\Phi(u)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上满足 P. S. 条件.

把 $H_0^1(\Omega)$ 分解成两部分：H^0 与 $\tilde{H}$，$\dim H^0 = 1 < +\infty$. 当 $u(x) \in H^0$ 时

$$\Phi(u) = \int_\Omega [\frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 - \frac{1}{2}\lambda_1 |u(x)|^2 - G(x,u)]dx$$
$$= -\int_\Omega G(x,u)dx = -\int_\Omega G(x,t\psi(x))dx \quad (u = t\psi(x)),$$

同(2.8) 的推导完全类似可得

$$\lim_{t\to+\infty}\int_\Omega G(x,t\psi(x))dx = +\infty, \quad \lim_{t\to-\infty}\int_\Omega G(x,t\psi(x))dx = +\infty.$$

从而

$$\lim_{\substack{\|u\|_{0,1}\to+\infty \\ u\in H^0}}\Phi(u) = -\infty. \tag{2.9}$$

当 $u(x) \in \tilde{H}$ 时

$$\Phi(u) = \int_\Omega [\frac{1}{2}|\nabla \tilde{u}(x)|^2 - \frac{1}{2}\lambda_1 |\tilde{u}(x)|^2 - G(x,\tilde{u})]dx$$
$$\geq \frac{1}{2}(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2})\int_\Omega |\nabla \tilde{u}(x)|^2 dx - \int_\Omega [G(x,\tilde{u}) - G(x,0)]dx$$
$$= \frac{1}{2}(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2})\int_\Omega |\nabla \tilde{u}(x)|^2 dx - \int_\Omega dx\int_0^1 g(x,s\tilde{u})\tilde{u}(x)ds$$
$$\geq \frac{1}{2}(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2})\int_\Omega |\nabla \tilde{u}(x)|^2 dx - \int_\Omega |\tilde{u}(x)|(c|\tilde{u}(x)|^\alpha + b(x))dx \quad (\text{条件(g)})$$
$$\geq \frac{1}{2}(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \epsilon)\int_\Omega |\nabla \tilde{u}(x)|^2 dx - c(\epsilon).$$

取定 $\epsilon > 0$ 足够小知

$$\inf_{u\in\tilde{H}}\Phi(u) \overset{\triangle}{=} \beta > -\infty. \tag{2.10}$$

由(2.9)，(2.10) 知存在 $r > 0$ 使

$$\sup_{u\in S_r}\Phi(u) < \inf_{u\in\tilde{H}}\Phi(u),$$

其中 $S_r = \{u(x) \in H^0 \mid \|u\|_{0,1} = r\}$. 由环绕形式的临界点定理知 $\Phi(u)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中至少有一个临界点，即方程(1.1) 在 $H_0^1(\Omega)$ 中至少有一个(弱) 解.

定理 1.2 的证明　显然 Φ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上是弱下半连续的，下证明它还是强制的，事实上当 $u(x) \in H_0^1(\Omega)$ 时

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega [|\nabla \tilde{u}(x)|^2 - \lambda_1 |\tilde{u}(x)|^2]dx - \int_\Omega [G(x,u^0 + \tilde{u}) - G(x,u^0)]dx - \int_\Omega G(x,u^0)dx$$
$$\geq \frac{1}{2}(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2})\int_\Omega |\nabla \tilde{u}(x)|^2 dx - c|t|^{2\alpha} - \int_\Omega G(x,t\psi(x))dx,$$

其中 $u^0 = t\psi(x)$，其它推导同(2.6).

由定理条件，同(2.8) 的推导完全类似可得

$$\lim_{t\to\infty}[c|t|^{2\alpha} + \int_\Omega G(x,t\psi(x))dx] = +\infty,$$

所以 $\Phi(u)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上不仅强制而且下方有界，从而 $\Phi(u)$ 必在 $H_0^1(\Omega)$ 中有临界点[7]. 证毕.

注 2.1　本文所提出的条件

$$\int_\Omega \Gamma_{-,\alpha}(x)\Psi^{1+\alpha}(x)\,dx < 0 < \int_\Omega \gamma_{+,\alpha}(x)\Psi^{1+\alpha}(x)\,dx;$$

$$\int_\Omega \Gamma_{-,\alpha}(x)\Psi^{1+\alpha}(x)\,dx < 0 < \int_\Omega \gamma_{-,\alpha}(x)\Psi^{1+\alpha}(x)\,dx$$

是Landesman-Lazer型条件, 但它和一般的Landesman-Lazer型条件有相当大的差别.

参 考 文 献

[1] D. G. Figueiredo, I Massabò, J. Math. Anal. Appl., 156(1991), 381-394.

[2] E. M. Landesman, A. C. Lazer, J. Math. Mech., 19(1970), 609-623.

[3] 张恭庆, 临界点理论及其应用, 上海科技出版社, 1986.

[4] P. H. Rabinowitz, *Nonlinear Analysis, A Collection of Papers in Honor of E. H. Rothe*, Academic Press, 1979, 161-177.

[5] H. Brezis, L. Nirenberg, Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa, 5(1978), 225-326.

[6] 韩志清, 一类共振问题及其扰动, 山东大学学报, 27: 3(1992).

[7] J. Mawhin, M. Willem, *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*, Appl. Math. Scis, 74, Springer-Verlag, 1989.

Solvability of a Sublinear Elliptic Partial Differential Equation at Resonance

Han Zhiqing

(Dept. of Math., Qingdao University, Qingdao 266071)

Abstract

This paper deals with the following elliptic partial differential equation at resonance

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda_1 u + g(x,u) = 0, & x \in \Omega \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

where $\Omega \subset R^n$ is a bounded open set with smooth boundary and $g(x,u)$ meets the following condition

$$|g(x,u)| \le c|u|^\alpha + b(x) \quad (0 \le \alpha < 1, b(x) \in L^2(\Omega)).$$

We propose a condition which is not the standard Landesman-Lazer condition and answer partially a question by Figueiredo and Massabò.

Keywords elliptic partial differential equation, resonance, Landesman-Lazer condition.