第16卷第3期　　数学研究与评论　　Vol 16 No. 3
1996年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 1996

L-fuzzy 集与素元集合套*

史 福 贵
(烟台师范学院数学系, 烟台264025)

摘　要　本文在L 是完全分配格时, 借助于素元极大集概念引入了素元集合套, 它是集合套概念的推广. 从而得到了一般L-fuzzy 集的若干新的分解定理与表现定理

关键词　极大集, 素元集合套, 分解定理, 表现定理
分类号　AMS(1991) 03E04/CCL O159

1　预　备

本文L 表示完全分配格, X 为非空分明集, P 表示L 中全体素元[1]之集 对$a \in L$, $\alpha(a)$ 表示 a 的最大极大集[1]. $\alpha^*(a) = \alpha(a) \cap P$. 易验证$\alpha^*(a)$ 仍是 a 的极大集 L^X 表X 上全体L-fuzzy 集 L^X 从L 中点式地诱出格运算"$\leq, \vee, \wedge$"仍是完全分配格, 恒取值$a \in L$ 的L-fuzzy 集仍记为 a. 本文将不区别分明集与其特征函数 对$A \in L^X$, 记

$$A^{[a]} = \{x \in X \mid a \notin \alpha(A(x))\},\ A^{(a)} = \{x \in X \mid A(x) \not\leq a\}.$$

显然, 若 $a \in \alpha(b)$, 则$A^{[a]} \subseteq A^{(b)} \subseteq A^{[b]}$. 特别当$L = [0,1]$, $A^{[a]} = \{x \in X \mid A(x) \geq a\}$ 且$A^{(a)} = \{x \in X \mid A(x) > a\}$.

命题1.1　设$\{A_i\}_{i \in I} \subseteq L^X$, 则 $\forall a \in L$, 有

(1)　$(\bigvee_{i \in I} A_i)^{(a)} = \bigcup_{i \in I}(A_i)^{(a)}$.

(2)　$(\bigwedge_{i \in I} A_i)^{[a]} = \bigcap_{i \in I}(A_i)^{[a]}$.

以下如不特别声明, a, b, c 等皆表示L 中的素元 对$\varnothing \subseteq L$, 规定 $\vee \varnothing = 0$, $\wedge \varnothing = 1$.

2　L-fuzzy 集的分解定理

定理2.1　设$A \in L^X$, 则

(1)　$A = \bigwedge_{a \in P}(a \vee A^{[a]})$;　　(2)　$A = \bigwedge_{a \in P}(a \vee A^{(a)})$;

(3)　$A^{[a]} = \bigcap_{a \in \alpha^*(b)} A^{[b]} = \bigcap_{a \in \alpha^*(b)} A^{(b)}$;　　(4)　$A^{(a)} = \bigcup_{b \in \alpha^*(a)} A^{[b]} = \bigcup_{b \in \alpha^*(a)} A^{(b)}$.

证明　(1)　由$A(x) = \wedge\{a \in P \mid a \in \alpha^*(A(x))\} = \wedge\{a \in P \mid A^{[a]}(x) = 0\} = \bigwedge_{a \in P}(a \vee A^{[a]}(x))$ 可得

* 1994年1月4日收到 山东省自然科学基金资助项目

(2) 由 $A(x)=\wedge\{a\in P\mid A(x)\leq a\}=\wedge\{a\in P\mid A^{(a)}(x)=0\}=\bigwedge_{a\in P}(a\vee A^{(a)}(x))$ 可得.

(3) $\forall a,b\in P$ 且 $a\in\alpha^*(b)$, 由 $A^{[a]}\subseteq A^{(b)}\subseteq A^{[b]}$ 知 $A^{[a]}\subseteq\bigcap_{a\in\alpha^*(b)}A^{(b)}\subseteq\bigcap_{a\in\alpha^*(b)}A^{[b]}$. 反之, 由 $x\notin A^{[a]}\Rightarrow a\in\alpha^*(A(x))=\alpha^*(\wedge\{b\in P\mid b\in\alpha^*(A(x))\})=\cup\{\alpha^*(b)\mid b\in\alpha^*(A(x))\}\Rightarrow\exists b\in\alpha^*(A(x))$ 使 $a\in\alpha^*(b)\Rightarrow\exists b\in P$ 使 $a\in\alpha^*(b)$ 且 $x\notin A^{[b]}\Rightarrow x\notin\bigcap_{a\in\alpha^*(b)}A^{[b]}$ 可知 $A^{[a]}\supseteq\bigcap_{a\in\alpha^*(b)}A^{[b]}$. 从而得(3).

(4) 由 $x\notin A^{(a)}\Rightarrow A(x)\leq a\Rightarrow\forall b\in\alpha^*(a), b\in\alpha^*(A(x))\Rightarrow x\notin\bigcup_{b\in\alpha^*(a)}A^{[b]}$ 知 $A^{(a)}\supseteq\bigcup_{b\in\alpha^*(a)}A^{[b]}\supseteq\bigcup_{b\in\alpha^*(a)}A^{(b)}$. 而由 $x\in A^{(a)}\Rightarrow A(x)\not\leq a\Rightarrow\exists b\in\alpha^*(a)$ 使 $A(x)\not\leq b$ 知 $A^{(a)}\subseteq\bigcup_{b\in\alpha^*(a)}A^{(b)}$. 从而得(4).

定理2.2 设 $A\in L^X$. 若映射 $H:P\to\mathbf{P}(X)$ 满足 $\forall a\in P, A^{(a)}\subseteq H(a)\subseteq A^{[a]}$, 则

(1) $A=\bigwedge_{a\in P}(a\vee H(a))$.

(2) $a,b\in P, a\in\alpha^*(b)\Rightarrow H(a)\subseteq H(b)$.

(3) $A^{[a]}=\bigcap_{a\in\alpha^*(b)}H(b)$.

(4) $A^{(a)}=\bigcup_{b\in\alpha^*(a)}H(b)$.

证明 由定理2.1可得(1), (3), (4). 而由 $a\in\alpha^*(b)\Rightarrow A^{[a]}\subseteq A^{(b)}$ 可得(2).

3 素元集合套

设 $\mathbf{P}(X)^P$ 表示所有映射 $H:P\to\mathbf{P}(X)$ 的全体. 则由 $\mathbf{P}(X)$ 是完全分配格知 $\mathbf{P}(X)^P$ 从 $\mathbf{P}(X)$ 中点式地诱出格运算"$\leq$, $\vee$, $\wedge$"使($\mathbf{P}(X)^P$, $\leq$, $\vee$, $\wedge$) 仍是完全分配格.

定义3.1 设 $H\in\mathbf{P}(X)^P$. 若 $a\in\alpha^*(b)\Rightarrow H(a)\subseteq H(b)$, 则称 H 为 X 上的素元集合套.

显然, 素元集合套是[2]中集合套的推广.

设 $A\in L^X$. $\forall a\in P$, 令 $H_1(a)=A^{[a]}, H_2(a)=A^{(a)}$. 则 H_1, H_2 是素元集合套. 一般地, 易证下面

定理3.1 设 $H\in\mathbf{P}(X)^P$. 若 $\forall a\in P, A^{(a)}\subseteq H(a)\subseteq A^{[a]}$, 则 H 是素元集合套.

X 上的素元集合套全体记为 $\mathbf{U}_P(X)$.

定理3.2 $\mathbf{U}_P(X)$ 是 $\mathbf{P}(X)^P$ 的完备子格, 从而是完全分配格.

证明 只需证 $\mathbf{U}_P(X)$ 对任意并与交封闭. 令 $H^0, H^1: P\to\mathbf{P}(X)$ 使 $\forall a\in P, H^0(a)=\varnothing, H^1(a)=X$. 则 H^0 与 H^1 分别是 $\mathbf{U}_P(X)$ 中的最小元与最大元. 设 $\{H_i\}_{i\in I}\subseteq\mathbf{U}_P(X)$. 则 $\forall a,b\in P$, 当 $a\in\alpha^*(b)$ 时, $(\bigvee_{i\in I}H_i)(a)=\bigcup_{i\in I}H_i(a)\subseteq\bigcup_{i\in I}H_i(b)=(\bigvee_{i\in I}H_i)(b)$. 即 $\bigvee_{i\in I}H_i\in\mathbf{U}_P(X)$. 同样可证 $\bigwedge_{i\in I}H_i\in\mathbf{U}_P(X)$. 于是 $\mathbf{U}_P(X)$ 是 $\mathbf{P}(X)^P$ 的完备子格, 从而是完全分配格.

定义3.2 设 $H_1, H_2\in\mathbf{U}_P(X)$. 若 $\forall a\in P$, 有 $\bigcup_{b\in\alpha^*(a)}H_1(b)=\bigcup_{b\in\alpha^*(a)}H_2(b)$, 则称 H_1 与 H_2 等价, 记为 $H_1\sim H_2$.

显然, $\sim$ 是素元集合套间的一个等价关系, 它将 $\mathbf{U}_P(X)$ 分成若干等价类, 以 $\mathbf{U}_P'(X)$ 记这些等价类全体. 对 $H\in\mathbf{U}_P(X)$, 以 $[H]$ 表示 H 所在的类.

定理3.3 设 $H\in\mathbf{U}_P(X)$, 则 $\forall a\in P$ 有

(1) $\bigcup_{b\in\alpha^*(a)} H(b)=\bigcup_{b\in\alpha^*(a)}\bigcap_{b\in\alpha^*(c)} H(c)$.

(2) $\bigcap_{a\in\alpha^*(b)} H(b)=\bigcap_{a\in\alpha^*(b)}\bigcup_{c\in\alpha^*(b)} H(c)$.

证明 (1) 由 $b\in\alpha^*(c)\Rightarrow H(b)\subseteq H(c)\Rightarrow H(b)\subseteq\bigcap_{b\in\alpha^*(c)}H(c)$ 可得 $\bigcup_{b\in\alpha^*(a)}H(b)\subseteq\bigcup_{b\in\alpha^*(a)}\bigcap_{b\in\alpha^*(c)}H(c)$. 反之, 由 $b\in\alpha^*(a)=\alpha^*(\wedge\alpha^*(a))=\cup\{\alpha^*(r)\mid r\in\alpha^*(a)\}$ 知存在 $r\in\alpha^*(a)$ 使 $b\in\alpha^*(r)$. 于是 $\bigcap_{b\in\alpha^*(c)}H(c)\subseteq H(r)\subseteq\bigcup_{b\in\alpha^*(a)}H(b)$. 进而 $\bigcup_{b\in\alpha^*(a)}\bigcap_{b\in\alpha^*(c)}H(c)\subseteq\bigcup_{b\in\alpha^*(a)}H(b)$. 得证(1). 类似可证(2).

推论3.4 设 $H_1,H_2\in\mathbf{U}_P(X)$, 则 $H_1\sim H_2$ 当且仅当 $\forall a\in P$,

$$\bigcap_{a\in\alpha^*(b)}H_1(b)=\bigcap_{a\in\alpha^*(b)}H_2(b).$$

定理3.5 设 $E_i,H_i\in\mathbf{U}_P(X)$ 且 $E_i\sim H_i$, $i\in I$, 则 $\bigwedge_{i\in I}E_i\sim\bigwedge_{i\in I}H_i$, $\bigvee_{i\in I}E_i\sim\bigvee_{i\in I}H_i$.

证明由定义3.2与推论3.4易得.

设 $[H_i]\in\mathbf{U}_P'(X)$, $i\in I$. 令

$$\bigwedge_{i\in I}[H_i]=[\bigwedge_{i\in I}H_i],\quad \bigvee_{i\in I}[H_i]=[\bigvee_{i\in I}H_i].$$

由定理3.5知这样规定是合理的.

定理3.6 对 $H\in\mathbf{U}_P(X)$, 令 $f(H)=\bigwedge_{a\in P}(a\vee H(a))$, 则

(1) $f(H)^{(a)}\subseteq H(a)\subseteq f(H)^{[a]}$.

(2) $f(H)^{[a]}=\bigcap_{a\in\alpha^*(b)}H(b)$.

(3) $f(H)^{(a)}=\bigcup_{b\in\alpha^*(a)}H(b)$.

(4) f 是 $\mathbf{U}_P(X)$ 到 L^X 的同态满射.

证明 (1) 由 $x\in f(H)^{(a)}\Rightarrow\forall b\in P, b\vee H(b)(x)\not\leq a\Rightarrow a\vee H(a)\not\leq a\Rightarrow x\in H(a)$ 可知 $f(H)^{(a)}\subseteq H(a)$. 而由 $x\notin f(H)^{[a]}\Rightarrow a\in\alpha^*(f(H)(x))=\bigcup_{b\in P}\alpha^*(b\vee H(b)(x))\Rightarrow\exists b\in P$ 使 $a\in\alpha^*(b)$ 且 $H(b)(x)=0$ 知 $x\notin H(a)$. 于是 $H(a)\subseteq f(H)^{[a]}$.

(2) 与(3) 由定理2.2可得.

(4) $\forall A\in L^X$ 与 $\forall a\in P$, 令 $H(a)=A^{[a]}$, 则 $H\in\mathbf{U}_P(X)$. 由定理2.1知 $f(H)=A$. f 是满射.

设 $\{H_i\}_{i\in I}\subseteq\mathbf{U}_P(X)$, 则由 $\bigvee_{i\in I}H_i\in\mathbf{U}_P(X)$ 与(3)知 $\forall a\in P$, $f(\bigvee_{i\in I}H_i)^{(a)}=\bigcup_{b\in\alpha^*(a)}(\bigvee_{i\in I}H_i)(b)=\bigcup_{b\in\alpha^*(a)}\bigcup_{i\in I}H_i(b)=\bigcup_{i\in I}\bigcup_{b\in\alpha^*(a)}H_i(b)=\bigcup_{i\in I}f(H_i)^{(a)}=(\bigvee_{i\in I}f(H_i))^{(a)}$. 故由定理2.1知 $f(\bigvee_{i\in I}H_i)=\bigvee_{i\in I}f(H_i)$. 即 f 保并. 借助(2)可证 f 保交. 因此 f 是同态.

推论3.7 设 $H_1,H_2\in\mathbf{U}_P(X)$. 则 $H_1\sim H_2$ 当且仅当 $f(H_1)=f(H_2)$.

推论3.8 $(\mathbf{U}_P'(X),\vee,\wedge)\cong(L^X,\vee,\wedge)$.

4　素元集轮与素元开集轮

定义4.1　$F\in \mathbf{P}(X)^P$ 称为素元集轮，如果 $\forall a\in P$，$F(a)=\bigcap_{a\in\alpha^*(b)}F(b)$. F 称为素元开集轮，如果 $\forall a\in P$，$F(a)=\bigcup_{b\in\alpha^*(a)}F(b)$.

显然素元集轮与素元开集轮皆是素元集合套.

设 $A\in L^X$，$\forall a\in P$，令 $F(a)=A^{[a]}$，$G(a)=A^{(a)}$，则由定理3.6知 F 与 G 分别是素元集轮与素元开集轮.

定理4.1　设 $H\in \mathbf{U}_P(X)$. $\forall a\in P$，令 $F_H(a)=\bigcap_{a\in\alpha^*(b)}H(b)$，$G_H(a)=\bigcup_{b\in\alpha^*(a)}H(b)$. 则 F_H 与 G_H 分别是素元集轮与素元开集轮.

证明　$\bigcap_{a\in\alpha^*(b)}F_H(b)=\bigcap_{a\in\alpha^*(b)}\bigcap_{b\in\alpha^*(c)}H(c)=\bigcap_{a\in\alpha^*(c)}H(c)=F_H(a)\Rightarrow F_H$ 是素元集轮. 而 $\bigcup_{b\in\alpha^*(a)}G_H(b)=\bigcup_{b\in\alpha^*(a)}\bigcup_{c\in\alpha^*(b)}H(c)=\bigcup_{c\in\alpha^*(a)}H(c)=G_H(a)\Rightarrow G_H$ 是素元开集轮.

记全体 X 上的素元集轮为 $\Phi_P(X)$，全体素元开集轮为 $\Psi_P(X)$.

易证 $\Phi_P(X)$ 对 $\mathbf{P}(X)^P$ 的交封闭且有最大元 F^1（这里 $\forall a\in P$，$F^1(a)=X$）. 因此 $\Phi_P(X)$ 是 $\mathbf{P}(X)^P$ 的完备交子半格. 同样可知 $\Psi_P(X)$ 是 $\mathbf{P}(X)^P$ 的完备并子半格.

定理4.2　设 $\{F_i\}_{i\in I}\subseteq\Phi_P(X)$，$\forall a\in P$，令 $F(a)=\bigcap_{a\in\alpha^*(b)}(\bigcup_{i\in I}F_i(b))$，则 F 是 $\{F_i\}_{i\in I}$ 在 $\Phi_P(X)$ 中的上确界.

证明　由定理4.1知 $F\in\Phi_P(X)$. $\forall a\in P$ 与 $\forall i\in I$，显然 $F(a)\supseteq F_i(a)$，即 F 是 $\{F_i\}_{i\in I}$ 在 $\Phi_P(X)$ 中的上界. 若 E 是 $\{F_i\}_{i\in I}$ 的上界，则 $\forall b\in P$，$\bigcup_{i\in I}F_i(b)\subseteq E(b)$. 从而 $F(a)\subseteq\bigcap_{a\in\alpha^*(b)}E(b)=E(a)$，即 $F\leq E$. 故 F 是 $\{F_i\}_{i\in I}$ 在 $\Phi_P(X)$ 中的上确界.

类似可证下面

定理4.3　设 $\{G_i\}_{i\in I}\subseteq\Psi_P(X)$，$\forall a\in P$，令 $G(a)=\bigcup_{b\in\alpha^*(a)}(\bigcap_{i\in I}G_i(b))$，则 G 是 $\{G_i\}_{i\in I}$ 在 $\Psi_P(X)$ 中的下确界.

定理4.4　作为完备格，$\Phi_P(X)$，$\Psi_P(X)$ 皆与 L^X 同构，从而皆是完全分配格.

证明　$\forall F\in\Phi_P(X)$，$\forall G\in\Psi_P(X)$，令

$$g(F)=\bigwedge_{a\in P}(a\vee F(a)),$$
$$h(G)=\bigwedge_{a\in P}(a\vee G(a)).$$

由定理3.6与推论3.7可见 g，h 是单满映射且 g 保交，h 保并. 下证 g 保并.

设 $\{F_i\}_{i\in I}\subseteq\Phi_P(X)$ 且 F 是其上确界. 则 $\forall a\in P$，

$$g(F)^{(a)}=\bigcup_{b\in\alpha^*(a)}F(b)=\bigcup_{b\in\alpha^*(a)}[\bigcap_{b\in\alpha^*(c)}(\bigcup_{i\in I}F_i(c))]=\bigcup_{b\in\alpha^*(a)}(\bigcup_{i\in I}F_i(c))$$
$$=\bigcup_{i\in I}g(F_i)^{(a)}=(\bigvee_{i\in I}g(F_i))^{(a)}.$$

故 $g(F)=\bigvee_{i\in I}g(F_i)$. g 保并. 类似可证 h 保交. 所以 g，h 皆是同构.

5　扩展原理

定义5.1 设$f: X \to Y$是映射，$\forall A \in L^X$，令

$$f(A) = \bigvee \{A(x) \mid x \in f^{-1}(y)\}.$$

称$f: L^X \to L^Y$为L值Zadeh型函数.又$\forall B \in L^Y$，定义$f^{-1}: L^Y \to L^X$，$f^{-1}(B) = B \circ f$.

定理5.1 设$f: L^X \to L^Y$是L值Zadeh型函数，$A \in L^X$，$B \in L^Y$，则

(1) $f(A) = \bigwedge_{a \in P}(a \vee f(A^{[a]}))$. (2) $f(A) = \bigwedge_{a \in P}(a \vee f(A^{(a)}))$.

(3) $f(A)^{[a]} = \bigcap_{a \in \alpha^*(b)} f(A^{(b)}) = \bigcap_{a \in \alpha^*(b)} f(A^{[b]})$. (4) $f(A)^{(a)} = f(A^{(a)})$.

(5) $f^{-1}(B) = \bigwedge_{a \in P}(a \vee f^{-1}(B^{[a]}))$. (6) $f^{-1}(B) = \bigwedge_{a \in P}(a \vee f^{-1}(B^{(a)}))$.

(7) $f^{-1}(B)^{[a]} = f^{-1}(B^{[a]})$. (8) $f^{-1}(B)^{(a)} = f^{-1}(B^{(a)})$.

证明 由定理2.2与定理3.6知为证(1)，(2)，(3)，(4)，只需证$\forall a \in P$，$f(A)^{(a)} \subseteq f(A^{(a)}) \subseteq f(A^{[a]}) \subseteq f(A)^{[a]}$即可.由$y \in f(A)^{(a)} \Rightarrow f(A)(y) \not\leq a \Rightarrow \exists x \in f^{-1}(y)$使$A(x) \not\leq a \Rightarrow \exists x \in f^{-1}(y)$使$x \in A^{(a)} \Rightarrow y \in f(A^{(a)})$得$f(A)^{(a)} \subseteq f(A^{(a)}) \subseteq f(A^{[a]})$.而由$y \notin f(A)^{[a]} \Rightarrow a \in \alpha^*(f(A)(y)) \Rightarrow \forall x \in f^{-1}(y), a \in \alpha(A(x)) \Rightarrow \forall x \in f^{-1}(y), x \notin A^{[a]} \Rightarrow y \notin f(A^{[a]})$知$f(A^{[a]}) \subseteq f(A)^{[a]}$.于是得证(1)，(2)，(3)，(4).类似可证(5)至(8).

参 考 文 献

[1] 王国俊，L-fuzzy拓扑空间论，陕西师范大学出版社，1988.

[2] 罗承忠，Fuzzy集与集合套，模糊数学，4(1983)，113—126.

[3] 罗承忠，模糊集引论，北京师范大学出版社，1989.

[4] 张文修，模糊数学基础，西安交通大学出版社，1984.

[5] G. Gierz等，*A Compendium of continuous lattices*，Springer-Verlag，1980.

L-Fuzzy Set and Prime Element Nested Sets

Shi Fugui

(Yantai Teachers' College，264025)

Abstract

In this paper, we introduce prime element nested sets which are generalizations of nested sets in [2]. Hence we obtain new descomposition theorems and representation theorems of L-fuzzy sets

Keywords maximal set, prime element nested sets, descomposition theorem, representation theorem.