第16卷第4期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 16 No. 4
1996年11月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Nov. 1996

# 凸函数样条及其应用*

刘松涛　　　　刘根洪
(复旦大学数学所，上海 200433)　(苏州大学数学系，215006)

**摘　要**　本文主要结果是利用 $m$ 条凸曲线的乘积 $\prod_{i=1}^{m} f_i(x,y)$ 或 $m$ 张凸曲面的乘积 $\prod_{i=1}^{m} f_i(x,y,z)$ 代替文献[2]中 $m$ 条直线的乘积 $\prod_{i=1}^{m} l_i$ 和 $m$ 张平面的乘积 $\prod_{i=1}^{m} \pi_i$，构造出一族具有高阶光滑接触边界条件的凸曲线和凸曲面，获得比文[2]更一般的结果.

**关键词**　函数样条，凸曲线，凸曲面.
**分类号**　AMS(1991) 65D07/CCL O241.5

**定义 1**　设 $\Gamma_f: f(x,y)=0, \Gamma_g: g(x,y)=0$ 是平面上两条 $c^k$ 阶($k\geqslant 2$)连续曲线，满足：
(i) $\Gamma_f \cap \Gamma_g = \{p_i, i=1,\cdots\} \neq \varnothing$；　(ii) $(f_x(p_i), f_y(p_i)) \neq (0,0)$.
则称 $\Gamma_\mu: F\equiv(1-\mu)f-\mu g^n=0(0<\mu<1, n\geqslant 2)$ 为由 $f,g$ 生成的函数样条(或函数样条曲线)，$n$ 和 $\mu$ 分别为 $F$ 的指数和参数，$\Gamma_\mu$ 为曲线族，$\Gamma_f, \Gamma_g$ 分别称为 $\Gamma_\mu$ 的基曲线和横截曲线.

设 $\Omega$ 为 $\Gamma_f$ 和 $\Gamma_g$ 所围成的单连通区域，

$$\Omega(f,g)=\{(x,y)\in R^2 \mid f>0, g>0\}.$$

类似地可以定义函数样条曲面.

**定义 2**　设 $f(x)$ 是 $C^1$ 连续函数，$x\in R^2$，则称向量 $\nabla f=(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2})^T$ 为 $f(x)$ 在点 $x$ 处的梯度.

**定义 3**　设 $f(x)$ 是 $C^2$ 连续函数，$x\in R^2$，则称 $\nabla^2 f=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$ 为 $f(x)$ 在点 $x$ 处的 Hessian 矩阵.

**定义 4**　设 $S$ 是 $R^2$ 中的非空开凸集，$f(x)$ 是定义在 $S$ 上的 $C^2$ 连续函数，如果对任意满足 $\lambda^T \nabla f=0$ 的向量 $\lambda$，恒有 $\lambda^T \nabla^2 f \lambda \leqslant 0$，则称 $f(x)$ 为 $S$ 上的凸函数，称 $f(x)=0$ 为 $S$ 上的凸曲线.

类似地可以定义凸曲面.

按上述概念，可得到下列结果：

**定理 1**　设 $R^2$ 中的 $m$ 条曲线 $\Gamma_i: f_i(x_1,x_2)=0(i=1,\cdots,m)$ 与 $\Gamma_{m+1}: g(x_1,x_2)=0$ 围成区

* 1994年3月28日收到. 96年4月26日收到修改稿.

域 $\Omega$，在 $\Omega$ 内有 $f_i(x_1,x_2)>0(i=1,2,\cdots,m)$，基函数 $f=\prod_{i=1}^{m}f_i>0$，横截函数 $g(x_1,x_2)>0$，并且 $\nabla^2 f_i$ 为半负定矩阵，$\nabla^2 g$ 为半正定矩阵，则函数样条曲线

$$\Gamma_\mu:F\equiv(1-\mu)\prod_{i=1}^{m}f_i(x_1,x_2)-\mu g^n(x_1,x_2)=0\quad(0<\mu<1,n\geqslant m)$$

是凸曲线.

**推论 1** 设平面上的 $m+1$ 条上凸曲线 $\Gamma_i:y=f_i(x)(i=1,\cdots,m)$，$\Gamma_{m+1}:y=g(x)$ 围成区域 $\Omega$，在 $\Omega$ 内有

$$f_i(x)-y>0(i=1,\cdots,m),y-g(x)>0;$$
$$\Gamma_i\cap\Gamma_{m+1}=\varnothing(i=2,\cdots,m-1);$$
$$\Gamma_j\cap\Gamma_{m+1}=p_j(x_j,y_j)\ (j=1,m),$$

且 $\Gamma_1,\Gamma_m$ 在 $\Omega$ 上分别是 $c^r$ 阶 $(r\geqslant2)$ 和 $c^s$ 阶 $(s\geqslant2)$ 函数，则函数样条曲线

$$\Gamma_\mu:F\equiv(1-\mu)\prod_{i=1}^{m}(f_i(x)-y)-\mu(y-g)^n=0\quad(0<\mu<1,n\geqslant m)$$

具有以下性质：

(a) $\Gamma_\mu$ 经过 $p_1(x_1,y_1),p_m(x_m,y_m)$；

(b) $\Gamma_\mu$ 与 $p_j(j=1,m)$ 至少为 $c^k$ 阶接触，$k=\min(n,r,s)-1$；

(c) $\Gamma_\mu\subset\Omega\cup(p_1,p_m)$；

(d) $\Gamma_\mu$ 是凸曲线.

**推论 2** 设 $R^2$ 中的 $m+1$ 条直线 $l_i\equiv a_ix+b_iy+c_i=0,a_i,b_i,c_i\in R(i=1,2,\cdots,m)$ 围成区域 $\Omega$，在 $\Omega$ 内有 $l_i>0(i=1,\cdots,m)$，则函数样条曲线

$$\Gamma_\mu:F\equiv(1-\mu)\prod_{i=1}^{m}l_i-\mu l_{m+1}^n=0\quad(0<\mu<1,n\geqslant m)$$

是凸曲线.

**定理 2** 设 $R^3$ 中的 $m$ 张曲面 $\Sigma_i:f_i(x,y,z)=0(i=1,\cdots,m)$ 与 $\Sigma_{m+1}:g(x,y,z)=0$ 围成区域 $\Omega$，在 $\Omega$ 内有 $f_i(x,y,z)>0(i=1,\cdots,m)$，基函数 $f=\prod_{i=1}^{m}f_i>0$，横截函数 $g(x,y,z)>0$，并且 $\nabla^2 f_i$ 为半负定矩阵，$\nabla^2 g$ 是半正定阵，则函数样条曲面

$$\Sigma_\mu:F\equiv(1-\mu)\prod_{i=1}^{m}f_i(x,y,z)-\mu g^n(x,y,z)=0\quad(0<\mu<1,n\geqslant m)$$

是凸曲面.

**推论 3** 设 $R^3$ 中的 $m+1$ 张凹向相同的上凸曲面 $\Sigma_i:z=f_i(x,y)(i=1,\cdots,m)$，$\Sigma_{m+1}:z=g(x,y)$ 围成区域 $\Omega$，在 $\Omega$ 内有 $f_i(x,y)-z>0(i=1,\cdots,m)$，$z-g(x,y)>0$，则函数样条曲面

$$\Sigma_\mu:F\equiv(1-\mu)\prod_{i=1}^{m}(f_i(x,y)-z)-\mu(z-g(x,y))^n=0\quad(0<\mu<1,n\geqslant m)$$

是凸曲面.

**推论 4** 设 $R^3$ 中的 $m+1$ 张平面：

$$\pi_i\equiv a_ix+b_iy+c_iz+d_i=0,\ a_i,b_i,c_i,d_i\in R(i=1,\cdots,m+1)$$

围成区域 $\Omega$，在 $\Omega$ 内 $\pi_i>0(i=1,\cdots,m+1)$，则函数样条曲面：

$$\Sigma_\mu : F \equiv (1-\mu)\prod_{i=1}^{m}\pi_i - \mu\pi_{m+1}^{n} = 0 \quad (0 < \mu < 1, n \geqslant m)$$

是凸曲面.

## 参 考 文 献


[1] E. Hartman, *Blending of implicit surfaces with functional spline*, CAD, 1990.

[2] J. Li, J. Hoschek, E. Hartman, *$G^{n-1}$-functional splines for interpolation and approximation of curves, surfaces and solids*, CAGD, 1990.

[3] S. Bedi, *Surface design using funictional blending*, CAD, 1992.

[4] E. Hartmann, Y. Y. Feng, *On the convexity of functional splines*, CAGD, 1993.

[5] Wu Zongmin, Liu Jianping, *On the convexity of the functional spline*, 1993.


# On the Convexity of Functional Splines and Its Application


*Liu Songtao*

(Inst. of Math., Fudan University, Shanghai 200433))

*Liu Genhong*

(Dept. of Math., Suzhou Univeristy, 215006)



**Abstract**

Two convexity theorems for a kind of functional splines curve and surface are proved and some applications are discussed.



**Keywords** function spline, convex curve, convex surface.