第16卷第4期 数学研究与评论 Vol. 16 No. 4
1996年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1996

性质(u)及其在 $l_p(X_n)$ 上的提升*

林 贵 华
(大连理工大学应用数学系, 116023)

摘 要 首先讨论了具有性质(u)的Banach空间的若干性质, 然后证明了性质(u)在某条件下可以提升到空间 $l_p(X_n)$ $(1\le p<\infty)$ 上去.

关键词 $l_p(X_n)$, 性质(u), (u)模
分类号 AMS(1991) 46B/CCL O177.2

设 $\{X_n\}$ 是一列Banach空间, $1\le p<\infty$, 令

$$l_p(X_n)=\{x=(x_n):\forall n,x_n\in X_n \text{ 且 } \|x\|=(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p)^{\frac{1}{p}}<\infty\},$$

$$l_\infty(X_n)=\{x=(x_n):\forall n,x_n\in X_n \text{ 且 } \|x\|=\sup_{n\ge1}\|x_n\|<\infty\}.$$

不难证明它们按照各自的范数 $\|\cdot\|$ 均成为Banach空间且 $l_1^*(X_n)\cong l_\infty(X_n^*)$, $l_p^*(X_n)\cong l_q(X_n^*)$, 这里 $1<p<\infty$ 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, X^* 代表 X 的共轭空间. 设 X 为上述定义的某个空间, 若 $x=(x_n)\in X$, $x^*=(x_n^*)\in X^*$, 则 $x^*(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n^*(x_n)$.

本文将探讨性质(u)在 $l_p(X_n)$ 上的提升问题. 文中, F 表示自然数集的幂集, $x^k\to x$ 表示强收敛, $x^k\xrightarrow{w.}x$ 表示弱收敛, 若 $x\in l_p(X_n)$ 时坐标表示视为 (x_n).

定义 Banach空间 X 中的级数 $\sum_n x_n$ 称为弱无条件Cauchy(wuC)的, 如果 $\sup_{\Delta\in F}\|\sum_{n\in\Delta}x_n\|<\infty$.

Banach空间 X 称为具有性质(u), 如果对 X 的任一弱Cauchy列 $\{x_n\}$ 均存在某wuC级数 $\sum_n y_n$ 使 $x_n-\sum_{i=1}^{n}y_i\xrightarrow{w.}0$.

已经证明, 所有具无条件基的Banach空间、所有弱列备Banach空间以及所有序连续的Banach格均具有性质(u). 特别地, l_p $(1\le p<\infty)$ 具有性质(u).

下面的定理表明, 性质(u)有一个等价的描述.

定理1 若Banach空间 X 的每个弱Cauchy列 $\{x_n\}$ 均存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 及某wuC级数 $\sum_n z_k$ 满足 $x_{n_k}-\sum_{i=1}^{k}z_i\xrightarrow{w.}0$, 则 X 具有性质(u).

* 1994年4月29日收到

证明 任取 X 的一个弱 Cauchy 列 $\{x_n\}$, 由假设存在其子列 $\{x_{n_k}\}$ 及其 wuC 级数 $\sum_k z_k$ 使 $x_{n_k} - \sum_{i=1}^{k} z_i \xrightarrow{w.} 0$. 现令 $y_n = \begin{cases} z_k, & n = n_k (k = 1, 2, \cdots); \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 则显然 $\sum_n y_n$ 是 X 中的 wuC 级数. 由于 $x_{n_k} - \sum_{i=1}^{n_k} y_i = x_{n_k} - \sum_{i=1}^{k} z_i \xrightarrow{w.} 0$, 而 $\{x_n - \sum_{i=1}^{n} y_i\}$ 是弱 Cauchy 列, 故 $x_n - \sum_{i=1}^{n} y_i \xrightarrow{w.} 0$. 这说明 X 具有性质(u).

给定 Banach 空间 X, 令

$\beta(X) = \{\upsilon \in X^{**}: \upsilon$ 是 X 中某点列的弱 * 极限$\}$,

$\pi(X) = \{(y_n): \sum_n y_n$ 是 X 中的 wuC 级数, 并记 $|||(y_n)||| = \sup_{\Delta \in F} \|\sum_{n \in \Delta} y_n\|\}$.

则 $\beta(X)$ 按 X^{**} 的范数成为 Banach 空间[1], 不难验证 $\pi(X)$ 按 $|||\cdot|||$ 亦成为 Banach 空间[2].

现定义 $T: \pi(X) \to \beta(X)$ 为 $T((y_n)) = w^* - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} y_i$, 则有

性质 1 T 是有界线性算子且 $\|T\| = 1$.

证明 T 的线性是显然的. 由于 $\forall x^* \in X^*$ 及 $\forall (y_n) \in \pi(X)$,

$$|x^*(T((y_n)))| = \lim_{n\to\infty} |x^*(\sum_{i=1}^{n} y_i)| \leq \|x^*\| \cdot |||(y_n)|||,$$

故 $\|T((y_n))\| \leq |||(y_n)|||$, 所以 T 是有界线性算子且 $\|T\| \leq 1$.

另一方面, 取 $x \in X$ 使 $\|x\| = 1$, 则 $e = \{x, 0, 0, \cdots\} \in \pi(X)$ 且 $|||e||| = 1$, $\|T(e)\| = \|x\| = 1$, 故 $\|T\| = 1$.

性质 2 若 X 具有性质(u), 则 T 是到上的.

证明 任取 $\upsilon \in \beta(X)$, 则存在 X 中的点列 $\{x_n\}$ 使 $\upsilon = w^* - \lim_{n\to\infty} x_n$. $\{x_n\}$ 显然是 X 中的弱 Cauchy 列. 而 X 具有性质(u), 故存在 $(y_n) \in \pi(X)$, 使 $x_n - \sum_{i=1}^{n} y_i \xrightarrow{w.} 0$. 于是

$$T((y_n)) = w^* - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} y_i = w^* - \lim_{n\to\infty} x_n = \upsilon$$

因此 T 是到上的.

记 $\mathbf{N}(T) = \{(y_n) \in \pi(X): T((y_n)) = 0\}$, 则 $\mathbf{N}(T)$ 为 $\pi(X)$ 的闭线性子空间, 于是商空间 $\pi(X)/\mathbf{N}(T)$ 在范数 $\|[(y_n)]\| = \inf_{(z_n) \in [(y_n)]} |||(z_n)|||$ 之下成为 Banach 空间. 若令 $S: \pi(X)/\mathbf{N}(T) \to \beta(X)$ 为 $S[(y_n)] = T((y_n))$, 则由性质 1 和性质 2 易知

性质 3 若 X 具有性质(u), 则 S 是一一到上的有界线性算子且 $\|S\| = 1$.

从而由 Banach 逆算子定理, 当 X 具有性质(u) 时, S 存在有界逆算子 S^{-1}. 我们称 $u = \|S^{-1}\|$ 为 X 的(u) 模. 显然有 $u \geq 1$.

定理 2 设 Banach 空间 X 具有性质(u), u 为其(u) 模, $\{x_n\}$ 为 X 的一个弱 Cauchy 列. 则对任意的 $\epsilon > 0$, 均存在 wuC 级数 $\sum_n y_n$ 满足

(a) $x_n - \sum_{i=1}^{n} y_i \xrightarrow{w.} 0$; (b) $\sup_{\Delta \in F} \|\sum_{i \in \Delta} y_i\| \leq u \overline{\lim_{n\to\infty}} \|x_n\| + \epsilon$

证明 因 $\{x_n\}$ 是 X 中的弱 Cauchy 列, 由 X^{**} 的弱 * 列备性, 存在 $\upsilon \in \beta(X)$, 使

$$\upsilon = w^* - \lim_{n\to\infty} x_n.$$

(1) 先证明 $\|\upsilon\| \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \|x_n\|$.

事实上, $\forall k$, 记 $A = \{x_n\}_{n\ge k}$, 则 $\upsilon \in \overline{CO(A)}^{w^*} = \overline{CO(A)}$. 于是存在 $\{z_i\} \subset CO(A)$. 使 $z_i \to \upsilon$. 注意到 $\forall i$, $\|z_i\| \le \sup_{n\ge k} \|x_n\|$. 故 $\|\upsilon\| = \lim_{i\to\infty} \|z_i\| \le \sup_{n\ge k} \|x_n\|$. 令 $k\to\infty$ 即得

$$\|\upsilon\| \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \|x_n\|.$$

(2) 因 X 具有性质(u), 故存在 wuC 级数 $\sum_n z_n$, 使 $x_n - \sum_{i=1}^n z_i \xrightarrow{w.} 0$. 于是

$$\upsilon = w^* - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n z_i = T((z_n)) = S[(z_n)].$$

所以 $\|[(z_n)]\| = \|S^{-1}(\upsilon)\| \le \|S^{-1}\| \cdot \|\upsilon\| \le u \overline{\lim_{n\to\infty}} \|x_n\|$. 而

$$\|[(z_n)]\| = \inf_{(y_n)\in[(z_n)]} |||(y_n)|||,\ \text{故}\ \forall \epsilon > 0,$$

均存在 $(y_n) \in [(z_n)]$ 使

$$\sup_{\Delta\in F} \left\|\sum_{i\in\Delta} y_i\right\| = |||(y_n)||| \le \|[(z_n)]\| + \epsilon \le u \overline{\lim_{n\to\infty}} \|x_n\| + \epsilon$$

由 $x_n - \sum_{i=1}^n z_i \xrightarrow{w.} 0$ 及 $(y_n) \in [(z_n)]$, 有 $x_n - \sum_{i=1}^n y_i \xrightarrow{w.} 0$.

现在来讨论性质(u) 在 $l_p(X_n)$ 上的提升问题, 主要结果如下:

定理 3 设每个 X_n 均具有性质(u), u_n 为其(u) 模, 如果 $c = \sup_{n\ge1} u_n < \infty$, 则 $l_p(X_n)$ $(1 \le p < \infty)$ 亦具有性质(u).

在证明这个定理之前先介绍两个引理

引理 1 设 $a_n^k \ge 0 (n, k \in N)$ 且 $\forall n$, $b_n = \underline{\lim_{k\to\infty}} a_n^k$ 均有限, 则 $\sum_{n=1}^\infty b_n \le \underline{\lim_{k\to\infty}} \sum_{n=1}^\infty a_n^k$.

证明 分两种情形:

(1) $\sum_{n=1}^\infty b_n = \infty$, 则 $\forall M > 0$, $\exists n_0$, st $\sum_{n=1}^{n_0} b_n > M$. 注意到 $\sum_{n=1}^{n_0} b_n = \underline{\lim_{k\to\infty}} \sum_{n=1}^{n_0} a_n^k$, 则 $\exists k_0$, st $k \ge k_0$ 时

$$\sum_{n=1}^{n_0} a_n^k > \sum_{n=1}^{n_0} b_n - 1,$$

故 $\sum_{n=1}^\infty a_n^k > \sum_{n=1}^{n_0} b_n - 1 > M - 1 (k \ge k_0)$, 从而 $\underline{\lim_{k\to\infty}} \sum_{n=1}^\infty a_n^k \ge M - 1$, 由 M 的任意性,

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} \sum_{n=1}^\infty a_n^k = \infty.$$

(2) $\sum_{n=1}^\infty b_n < \infty$, 则 $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_0$, st

$$\sum_{n=1}^{n_0} b_n > \sum_{n=1}^\infty b_n - \epsilon,$$

注意到 $\sum_{n=1}^{n_0} b_n = \underline{\lim_{k\to\infty}} \sum_{n=1}^{n_0} a_n^k$, 对上述的 ϵ, $\exists k_0$, st $k \ge k_0$ 时 $\sum_{n=1}^{n_0} a_n^k > \sum_{n=1}^{n_0} b_n - \epsilon$, 故 $k \ge k_0$ 时 $\sum_{n=1}^\infty a_n^k >$

$\sum_{n=1}^{n_0} b_n - \epsilon > \sum_{n=1}^{\infty} b_n - 2\epsilon$, 从而$\varliminf_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k \geq \sum_{n=1}^{\infty} b_n - 2\epsilon$ 由 $\epsilon > 0$ 的任意性, $\varliminf_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k \geq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

引理 2[3] 在 $l_p(X_n)$ $(1 < p < \infty)$ 中, $x^k \xrightarrow{w.} 0$ 当且仅当$\{\|x^k\|\}$ 有界且 $\forall n$, $x_n^k \xrightarrow{w.} 0$.

证明参见文献[3].

定理 3 的证明 任取 $l_p(X_n)$ $(1 \leq p < \infty)$ 的一个弱Cauchy 列$\{x^k\}$. 由共鸣定理, $\{\|x^k\|\}$ 有界, 从而$\{\|x_n^k\|\}_{n\geq 1, k\geq 1}$ 也有界, 利用对角线法, 存在$\{k\}$ 的子列$\{k_i\}$, 使 $\forall n$, $\lim_{i\to\infty}\|x_n^{k_i}\|$存在且有限 现考虑$\{x^k\}$ 的子列$\{x^{k_i}\}$.

$\{x^{k_i}\}$ 是 $l_p(X_n)$ 中的弱Cauchy 列, 故 $\forall n$, $\{x_n^{k_i}\}$ 为X_n 中的弱Cauchy 列 因X_n 具有性质(u), 由定理 2, 存在X_n 中的wuC 级数$\sum_i y_n^i$ 满足

(a) $x_n^{k_i} - \sum_{j=1}^{i} y_n^j \xrightarrow{w.} 0$;

(b) $\sup_{\Delta\in F}\|\sum_{j\in\Delta} y_n^j\| \leq u_n \overline{\lim_{i\to\infty}}\|x_n^{k_i}\| + \frac{1}{n^2} \leq c \lim_{i\to\infty}\|x_n^{k_i}\| + \frac{1}{n^2}$.

令 $y^i = (y_n^i)$ $(\forall i)$.

(1) 断言 $y^i \in l_p(X_n)$ $(\forall i)$ 且 $\sum_i y^i$ 是wuC 级数

事实上, 由Minkowski 不等式及引理 1 有

$$\sup_{\Delta\in F}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|\sum_{j\in\Delta} y_n^j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(c\lim_{i\to\infty}\|x_n^{k_i}\| + \frac{1}{n^2}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq c\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{i\to\infty}\|x_n^{k_i}\|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}\right)^{\frac{1}{p}} \leq c\lim_{i\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n^{k_i}\|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= c\lim_{i\to\infty}\|x^{k_i}\| + \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

特别地, $\forall i$, $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|y_n^i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$, 这说明$y^i \in l_p(X_n)$. 注意到$\sup_{\Delta\in F}\|\sum_{j\in\Delta} y^j\| = \sup_{\Delta\in F}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|\sum_{j\in\Delta} y_n^j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$, 则知$\sum_i y^i$ 是wuC 级数

(2) 分两种情形证明$x^{k_i} - \sum_{j=1}^{i} y^j \xrightarrow{w.} 0$.

(i) $1 < p < \infty$. 因$\sum_i y^i$ 是wuC 级数而$\{x^{k_i}\}$ 是弱Cauchy 列, 由共鸣定理, $\{\|x^{k_i} - \sum_{j=1}^{i} y^j\|\}$ 有界, 由条件(a) 及引理 2, $x^{k_i} - \sum_{j=1}^{i} y^j \xrightarrow{w.} 0$.

(ii) $p = 1$, $\forall x^* \in l_\infty(X_n^*)$, 因

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n^*\left(x_n^{k_i} - \sum_{j=1}^{i} y_n^j\right)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\|x_n^*\|\cdot\|x_n^{k_i} - \sum_{j=1}^{i} y_n^j\| \leq \|x^*\|\cdot\|x^{k_i} - \sum_{j=1}^{i} y^j\|,$$

故 $a^i = \{x_n^*(x_n^{k_i} - \sum_{j=1}^{i} y_n^j)\} \in l_1$. 由于$\{x^{k_i} - \sum_{j=1}^{i} y^j\}$ 是 $l_1(X_n)$ 中的弱Cauchy 列, 所以$\{a^i\}$ 是 l_1 中的弱Cauchy 列, 而 l_1 是弱列备的, 故有 $a = \{\xi_n\} \in l_1$, 使 $a^i \xrightarrow{w.} a$, 即 $\forall n$, $x_n^*(x_n^{k_i} - \sum_{j=1}^{i} y_n^j) \to$

ξ_n. 而 $\forall n, x_n^{k_i} - \sum_{j=1}^{i} y_n^j \xrightarrow{w.} 0$, 故 $\forall n, \xi_n = 0$.

注意到 $(1, 1, \cdots) \in l_\infty$, 于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 \cdot [x_n^* (x_n^{k_i} - \sum_{j=1}^{i} y_n^j) - \xi_n] \to 0$$

即 $x^* (x^{k_i} - \sum_{j=1}^{i} y^j) \to 0$. 由 x^* 的任意性, $x^{k_i} - \sum_{j=1}^{i} y^j \xrightarrow{w.} 0$

由(1), (2) 及定理 1, 说明 $l_p(X_n)$ 具有性质(u).

推论 若 X 具有性质(u), 则 $l_p(X)$ $(1 \le p < \infty)$ 亦具有性质(u).

参 考 文 献

[1] R. D. Mcwilliams, *A note on weak sequential convergence*, Pacific J. Math., 17(1962), 333- 335.

[2] N. Kalton, E. Saab and P. Saab, *$L_p(X)$ $(1\le p<\infty)$ has the property (u) wherever X does*, Bull. Sc. Math., 115(1991), 369- 377.

[3] 林贵华, 关于矢值序列空间 $l_p(X_n)$, 南开大学学报, 3(1992), 6- 15.

On Property (u) and Its Lifting on $l_p(X_n)$

Lin Guihua

(Dept. of Appl. Math., Dalian University of Technology, 116023)

Abstract

In this paper, we first discuss some properties of the spaces with the property (u), and then we prove that the property (u) can be carried to $l_p(X_n)$ $(1 \le p < \infty)$ under some condition.

Keywords $l_p(X_n)$, the property (u), (u) module.