第16卷第4期 数学研究与评论 Vol. 16 No. 4
1996年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1996

几种向量值测度及其性质*

林 一 星
(龙岩师范学校, 福建364000)

摘　要　本文利用拟连续测度空间, 构造了几种向量值测度, 并且讨论了它们的性质.

关键词　拟连续, 向量值测度, 算子.
分类号　AMS(1991) 46G10/CCL O173.3

文[1]定义了测度空间的拟连续性, 并且研究了其性质, 还给出了几种典型的拟连续测度空间. 文[2], [3]也讨论了拟连续测度空间的性质. 本文继续讨论它的性质.

定理1　设概率测度空间$(G, \mathbf{B}, \mu)$关于可测变换线性空间θ是拟连续的, $h \in \theta$, 映射

$$F: \mathbf{B} \to L[0,1] \text{ 为当 } A \in \mathbf{B} \text{ 时},$$
$$A \to \mu(A + th),$$

则F是$\mathbf{B}$上取值于$L[0,1]$中的有界变差向量值测度. 如果$(G, \mathbf{B}, \mu)$又关于θ拟不变, 则F关于μ绝对连续.

证明　由文[2]引理4知, 当$A \in \mathbf{B}$时, $\mu(A + th) \in L[0,1]$.

设$\{A_n\} \subset \mathbf{B}$两两不交, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, 因为$\mu(A + th) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n + th)$, 由控制收敛定理知

$$\int_0^1 \left| \mu(A + th) - \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i + th) \right| dt \to 0 \ (n \to \infty),$$

所以F是$\mathbf{B}$上取值于$L[0,1]$中的向量值测度.

剩下要证明的, 由有关定义直接知道.

定理2　设概率测度空间$(G, \mathbf{B}, \mu)$关于可测变换线性空间θ是拟连续的, $h \in \theta$, 映射

$$F^p: \mathbf{B} \to L^p[0,1] \text{ 为当 } A \in \mathbf{B} \text{ 时}$$
$$A \to \mu(A + th),$$
$$m: \mathbf{B} \to C[0,1] \text{ 为当 } A \in \mathbf{B} \text{ 时}$$
$$A \to \mu(A + th),$$

则F^p和m都是向量值测度, 而且$\{m(A) | A \in \mathbf{B}\}$是$C[0,1]$中的列紧集, $p \geq 1$.

若$(G, \mathbf{B}, \mu)$关于θ又是拟不变的, 则F^p和m均是关于μ绝对连续.

证明　由文[2]引理4知, 当$A \in \mathbf{B}$时, $\mu(A + th) \in L^p[0,1]$. 设$\{A_n\} \subset \mathbf{B}$两两不交, $A =$

* 1993年5月14日收到. 95年3月13日收到修改稿

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，因为

$$\mu(A+th)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n+th),$$

由文[4]知，定理1中 $|F|(A)=\int_0^1\mu(A+th)dt$ 是 $\mathbf{B}$ 上的测度，因此

$$\int_0^1\left|\mu(A+th)-\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i+th)\right|^p dt=\int_0^1\left|\mu\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty}A_i+th\right)\right|^p dt$$

$$\leq\int_0^1\mu\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty}A_i+th\right)dt=|F|\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty}A_i\right)\to 0\,(n\to\infty),$$

于是 F^p 是向量值测度.

设 $\{B_n\}\subset\mathbf{B}$，$B_n\downarrow\varnothing$，因 $(G,\mathbf{B},\mu)$ 关于 θ 拟连续，从而存在 $t_n\in[0,1]$，使

$$\|\mu(B_n+th)\|_{C[0,1]}=\mu(B_n+t_nh),$$

于是存在 $\{t_n\}$ 的子列 $\{t_{n_i}\}$，当 $i\to\infty$ 时，$t_{n_i}\to t_0\in[0,1]$. 任给 $\epsilon>0$，因 $\{\mu(A+th)\,|A\in\mathbf{B}\}$ 是 t 的等度连续函数族，故 i 充分大时，有 $|\mu(B_{n_i}+t_{n_i}h)-\mu(B_{n_i}+t_0h)|<\frac{\epsilon}{2}$.

因 $B_n\downarrow\varnothing$，由测度的性质知 $\lim_{n\to\infty}\mu_{t_0h}(B_n)=0$，即 $\lim_{n\to\infty}\mu(B_n+t_0h)=0$，于是 i 充分大时

$$\mu(B_{n_i}+t_0h)<\frac{\epsilon}{2},$$

因此 i 充分大时，

$$\|\mu(B_{n_i}+th)\|_{C[0,1]}=\mu(B_{n_i}+t_{n_i}h)\leq|\mu(B_{n_i}+t_{n_i}h)-\mu(B_{n_i}+t_0h)|+\mu(B_{n_i}+t_0h)<\epsilon,$$

所以 $i\to\infty$ 时，$\|\mu(B_{n_i}+th)\|_{C[0,1]}\to 0$. 由 $\mu(B_1+th)\geq\mu(B_2+th)\geq\cdots\geq\mu(B_n+th)\geq\cdots$，知 $n\to\infty$ 时，$\|\mu(B_n+th)\|_{C[0,1]}\to 0$.

设 $\{A_n\}\subset\mathbf{B}$ 两两不交，$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，$B_n=\bigcup_{j=n+1}^{\infty}A_j$，则 $B_n\downarrow\varnothing$. 由 $\mu(A+th)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n+th)$ 知

$$\left\|\mu(A+th)-\sum_{j=1}^{n}\mu(A_j+th)\right\|_{C[0,1]}=\left\|\sum_{j=n+1}^{\infty}\mu(A_j+th)\right\|_{C[0,1]}$$

$$=\|\mu(B_n+th)\|_{C[0,1]}\to 0\,(n\to\infty),$$

所以 m 是向量值测度.

由文[2]引理4知，$\{m(A)\,|A\in\mathbf{B}\}$ 是列紧集.

若 $(G,\mathbf{B},\mu)$ 关于 θ 拟不变，显然 F^p 和 m 均是关于 μ 绝对连续.

定理3　设概率测度空间 $(G,\mathbf{B},\mu)$ 关于可测变换线性空间 θ 是拟连续的，$h\in\theta$，映射 $\check{F}$：$\mathbf{B}\to L^2[0,1]$ 为当 $A\in\mathbf{B}$ 时，$A\to\int_0^t\mu(A+th)dt$，$\check{m}$：$\mathbf{B}\to C[0,1]$ 为当 $A\in\mathbf{B}$ 时，$A\to\int_0^t\mu(A+th)dt$，则 $\check{F}$ 和 $\check{m}$ 都是有界变差向量值测度.

若 $(G,\mathbf{B},\mu)$ 关于 θ 又是拟不变的，则 $\check{F}$ 和 $\check{m}$ 都是关于 μ 绝对连续.

证明　设 $\{A_n\}\subset\mathbf{B}$ 两两不交，$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，由定理1知

$$\left\|\int_0^t\mu(A+th)dt-\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\mu(A_i+th)dt\right\|_{L^2[0,1]}$$

$$= \{ \int_0^1 [\int_0^1 (\mu(A+th) - \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i+th)) dt]^2 dx \}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \{ \int_0^1 [\int_0^1 |\mu(A+th) - \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i+th)| dt]^2 dx \}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \{ \int_0^1 [\int_0^1 |\mu(A+th) - \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i+th)| dt]^2 dx \}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \{ \int_0^1 |\mu(A+th) - \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i+th)| dt$$

$$= \| F(A) - \sum_{i=1}^{n} F(A_i) \|_{L[0,1]} \to 0 (n \to \infty),$$

所以 $\check{F}$ 为向量值测度 又

$$\| \int_0^1 \mu(A+th) dt \|_{L^2[0,1]} = \{ \int_0^1 [\int_0^1 \mu(A+th) dt]^2 dx \}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \{ \int_0^1 [\int_0^1 \mu(A+th) dt]^2 dx \}^{\frac{1}{2}} = \int_0^1 \mu(A+th) dt,$$

因此由定义知, $\check{F}$ 为有界变差的[4].

对任何 $f(t) \in L[0,1]$, 作 $(Tf)(x) = \int_0^1 f(t) dt$, 由文[5]知, T 为 $L[0,1]$ 到 $C[0,1]$ 的线性有界算子. 由定理1知

$$\| \int_0^1 \mu(A+th) dt - \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \mu(A_i+th) dt \|_{C[0,1]} = \| TF(A) - \sum_{i=1}^{n} TF(A_i) \|_{C[0,1]}$$

$$= \| TF(A) - T(\sum_{i=1}^{n} F(A_i)) \|_{C[0,1]} \leq \|T\| \| F(A) - \sum_{i=1}^{n} F(A_i) \|_{L[0,1]} \to 0 (n \to \infty),$$

所以 $\check{m}$ 是向量值测度

剩下要证明的, 均是显然的

定理4 设概率测度空间 $(G, \mathbf{B}, \mu)$ 关于可测变换线性空间 θ 是拟不变拟连续的, 当 $h \in \theta$ 时, 则存在 $(G, \mathbf{B}, \mu)$ 上取值于 $L^2[0,1]$ 的Bochner 可积函数 $\varphi_m(g)$, 使对于一切 $A \in \mathbf{B}$, 有

$$\int_0^1 \mu(A+th) dt = \int_A \varphi_m(g) d\mu(g).$$

证明 令 $\check{F}(A) = \int_0^1 \mu(A+th) dt$, 由定理3知, $\check{F}$ 是 $\mathbf{B}$ 上取值于 $L^2[0,1]$ 中的有界变差的关于 μ 绝对连续的向量值测度 由文[4]知, $L^2[0,1]$ 具RNP, 于是定理4结论成立

定理5 设概率测度空间 $(G, \mathbf{B}, \mu)$ 关于可测变换线性空间 θ 是拟连续, $h \in \theta$, $K(x,t) \in L^2([0,1] \times [0,1])$, 映射 $\mathring{F}: \mathbf{B} \to L^2[0,1]$ 为当 $A \in \mathbf{B}$ 时, $A \to \int_0^1 K(x,t) \mu(A+th) dt$ 若 $K(x,t)$ 是 $[0,1] \times [0,1]$ 上二元连续函数, 映射 $\mathring{m}: \mathbf{B} \to C[0,1]$ 为当 $A \in \mathbf{B}$ 时, $A \to \int_0^1 K(x,t) \mu(A+th) dt$ 则 $\mathring{F}$ 和 $\mathring{m}$ 都是向量值测度, 且 $\{\mathring{F}(A) | A \in \mathbf{B}\}$ 是 $L^2[0,1]$ 中的列紧集, $\{\mathring{m}(A) | A \in \mathbf{B}\}$ 是 $C[0,1]$ 中的列紧集 若 $(G, \mathbf{B}, \mu)$ 关于 θ 又是拟不变的, 则 $\mathring{F}$ 和 $\mathring{m}$ 均是关于 μ 绝对连续

证明 由文[5]知, 当 $f(t) \in L^2[0,1]$ 时, $(Kf)(x) = \int_0^1 K(x,t) f(t) dt$, 则 K 是 $L^2[0,1]$

$\to L^2[0,1]$的全连续线性有界算子.

当$f(t)\in C[0,1]$时, $(Kf)(x)=\int K(x,t)f(t)dt$, 则$K$是$C[0,1]\to C[0,1]$的全连续线性有界算子. 设$\{A_n\}\subset\mathbf{B}$两两不交, $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$, 由定理2知,

$$\left\|\int K(x,t)\mu(A+th)dt-\sum_{i=1}^{n}\int K(x,t)\mu(A_n+th)dt\right\|_{L^2[0,1]}$$

$$=\left\|KF^2(A)-\sum_{i=1}^{n}KF^2(A_n)\right\|_{L^2[0,1]}=\left\|KF^2(A)-K\left(\sum_{i=1}^{n}F^2(A_n)\right)\right\|_{L^2[0,1]}$$

$$\leq\|K\|\left\|F^2(A)-\sum_{i=1}^{n}F^2(A_n)\right\|_{L^2[0,1]}\to 0\,(n\to\infty),$$

所以$\mathring{F}$是向量值测度 因K是全连续的, 于是$\{\mathring{F}(A)\,|A\in\mathbf{B}\}$是$L^2[0,1]$中的列紧集

对于$\mathring{m}$, 可类似证明 关于绝对连续性是显然的

定理6 设概率测度空间$(G,\mathbf{B},\mu)$关于可测变换线性空间θ是拟不变拟连续的, $K(x,t)\in L^2([0,1]\times[0,1])$是有界函数, 当$h\in\theta$时, 则存在$(G,\mathbf{B},\mu)$上取值于$L^2[0,1]$的Bochner可积函数$\varphi_h(g)$, 使对于一切$A\in\mathbf{B}$, 有$\int K(x,t)\mu(A+th)dt=\int\varphi_h(g)d\mu(g)$, 且$\{\int\varphi_h(g)d\mu(g)\,|A\in\mathbf{B}\}\subset L^2[0,1]$是列紧集

证明 设$\mathring{F}(A)=\int K(x,t)\mu(A+th)dt$, $|K(x,t)|\leq\lambda$, 由定理5知, $\mathring{F}$是$\mathbf{B}$上取值于$L^2[0,1]$的关于μ绝对连续的向量值测度, 且$\{\mathring{F}(A)\,|A\in\mathbf{B}\}\subset\mathbf{L}^2[0,1]$是列紧集 又

$$\|\mathring{F}(A)\|_{L^2[0,1]}=\left\{\int\left[\int K(x,t)\mu(A+th)dt\right]^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}\leq\lambda\int\mu(A+th)dt,$$

因此由定义知[4], $\mathring{F}$是有界变差的, 由文[4]知, $L^2[0,1]$具RNP, 于是定理6结论成立

注 连续函数是有界函数

参 考 文 献

[1] Xia Daoming, *Measure and Integration Theory and Infinited Dimensional Spaces* (*trans E. J. Brody*), Acad Press, N. Y., 1972

[2] 林一星, 拟特征标序列收敛的零一律与遍历测度的关系, 数学年刊, 8A: 6(1987), 664—667.

[3] 林一星, 线性拓扑空间的子群的测度论性质, 数学学报, 33: 2(1990), 233—235.

[4] J. Diestel, J. J. Uhr, *Vector measure*, Mathematical Suryers, 15, 1977.

[5] 夏道行等, 实变函数论与泛函分析下册, 人民教育出版社, 1980

Some Vector-Valued Measures and Their Properties

Lin Yixing

(Longyan Normal School, Fujian 364000)

Abstract

In this paper, we utilize the quasi-continuous measures space to set up several vector-valued measure, and discuss their properties

Keywords quasi continaity, vector measure opertor.