第16卷第4期 数学研究与评论 Vol.16 No.4
1996年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1996

Drazin 逆的一个性质特征*

张立平　　王宜举
(曲阜师范大学运筹所，山东273165)

摘　要　对任意的 n 阶方阵 $A\in C^{n\times n}$，本文给出它的Drazin 逆的一个重要性质(见定理1)，并给出 A 的 D-逆的一个求解算法，从而推广了[2]中的结论

关键词　Drazin 逆，算法，Jordon 分解
分类号　AMS(1991) 15A/CCL O151.21

1　引　言

周知，对任意 n 阶可逆阵 $A\in C_n^{n\times n}$，A^{-1} 为满足式子 $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A & I\\ I & X\end{pmatrix}=\operatorname{rank}(A)$ 的唯一解. 这里首先引入 A 的 D-逆的定义，然后讨论它的类似结论

定义1　设 $A\in C^{n\times n}$，称满足 $\operatorname{rank}(A^{k+1})=\operatorname{rank}(A^k)$ 的最小非负整数 k 为矩阵 A 的指标，记作 $\operatorname{ind}(A)$.

定义2　设 $A\in C^{n\times n}$，$\operatorname{ind}(A)=k$，若 n 阶方阵 X 满足:

(1^k) $A^kXA=A^k$;　(2) $XAX=X$;　(3) $AX=XA$,

则称 X 为 A 的 D-逆，记作 $A^{(d)}$.

对任意 $A\in C^{n\times n}$，设 $\operatorname{ind}(A)=k$，$\operatorname{rank}(A^k)=r$，$A$ 的 D-逆存在且唯一. 设 A 的Jordon 分解为

$$A=T\begin{pmatrix}C & 0\\ 0 & N\end{pmatrix}T^{-1},$$

其中 C 为 r 阶可逆阵，N 为 k 次幂零阵，则

$$A^{(d)}=T\begin{pmatrix}C^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}T^{-1}.$$

有关 D-逆的性质参见[1].

引理　设 $P=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$，$A$ 为可逆阵，则当且仅当 $D=CA^{-1}B$ 时，$\operatorname{rank}(P)=\operatorname{rank}(A)$.

2　主要结果

定理1　设 $A\in C^{n\times n}$，$\operatorname{ind}(A)=k$，$\operatorname{rank}(A^k)=r$，则存在唯一的 n 阶方阵 X，使得

* 1994年1月21日收到. 96年4月4日收到修改稿. 国家自然科学基金资助项目.

$$A^kX=0,\ XA^k=0,\ X^2=X,\ \mathrm{rank}(X)=n-r, \qquad (*)$$

对上述X, **存在唯一的**n **阶方阵**Y, **使得**

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & I-X \\ I-X & Y \end{pmatrix}=\mathrm{rank}(A),$$

n **阶方阵**Y **就是**A **的**D-**逆**$A^{(d)}$, **且有**$X=I-AA^{(d)}$.

证明 **设**A **的**Jordon **分解为**

$$A=T\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}T^{-1},$$

其中C **是**r **阶可逆阵**, N **是**k **次幂零阵. 则有**

$$A^k=T\begin{pmatrix} C^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T^{-1}.$$

取$X=T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}T^{-1}$, **于是有**

$$A^kX=T\begin{pmatrix} C^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T^{-1}T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}T^{-1}=0,$$

$$XA^k=T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}T^{-1}T\begin{pmatrix} C^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T^{-1}=0,$$

$$X^2=X, \quad \mathrm{rank}(X)=n-r,$$

即X **满足条件**$(*)$.

再证唯一性 若还存在n **阶方阵**X_0 **满足条件**$(*)$, **则令**$X_1=T^{-1}X_0T$, **将**X_1 **分块**

$$X_1=\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix},$$

则由$A^kX_0=0$ **知**, $T^{-1}A^kTT^{-1}X_0T=0$, **即**

$$\begin{pmatrix} C^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}=0.$$

由C^k **是可逆阵可推出**, $E=F=0$, **从而**

$$X_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ G & H \end{pmatrix}.$$

又由$X_0A^k=0$ **同样类似地可推出**, $G=0$, **从而**

$$X_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}.$$

又由$X_0^2=X_0$, $\mathrm{rank}(X_0)=n-r$ **可推出**, $H=I_{n-r}$. **于是**$X_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$. **因而**

$$X_0=TX_1T^{-1}=T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}T^{-1}=X.$$

唯一性得证

令$M=I-AA^{(d)}$, **显然有**$A^kM=0, MA^k=0, M^2=M$. **因为**$N(AA^{(d)})=R(I-AA^{(d)})$, $N(AA^{(d)})=N(A^{(d)})$, **所以**$\mathrm{rank}(M)=\mathrm{rank}(I-AA^{(d)})=n-\mathrm{rank}(A^{(d)})=n-\mathrm{rank}(A^k)=$

$n-r$. 故 M 满足条件(*), 由唯一性知 $X=I-AA^{(d)}$, 于是

$$\begin{pmatrix} A & I-X \\ I-X & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AA^{(d)} \\ AA^{(d)} & Y \end{pmatrix}.$$

因 $\begin{pmatrix} I & 0 \\ -A^{(d)} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & AA^{(d)} \\ AA^{(d)} & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A^{(d)} \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & Y-A^{(d)} \end{pmatrix}$, 故当且仅当 $Y=A^{(d)}$ 时

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & I-X \\ I-X & Y \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(A). \qquad \square$$

通过引理和定理 1, 可以得到一个求 A 的 D-逆 $A^{(d)}$ 的方法. 在下面的定理中, 用 $A[\alpha|\beta]$ 表示 A 的 r 阶子阵, 其中 α 是行指标集 $\{i_1,\cdots,i_r\}$, β 是列指标集 $\{j_1,\cdots,j_r\}$, 即 $A[\alpha|\beta]$ 是 A 中 $i_1,\cdots,i_r$ 行与 $j_1,\cdots,j_r$ 列上的元素组成的子阵. 记 $N=\{1,2,\cdots,n\}$, 则 $(I-X)[N|\beta]$ 是 $I-X$ 中 $1,2,\cdots,n$ 行与 $j_1,\cdots,j_r$ 列上的元素组成的 $n\times r$ 阶子阵; $(I-X)[\alpha|N]$ 则由 $I-X$ 中 $i_1,\cdots,i_r$ 行与 $1,2,\cdots,n$ 列上元素组成的 $r\times n$ 阶子阵. 于是有

定理 2 设 $A\in C^{n\times n}$, $\operatorname{rank}(A)=r\geq 1$, 令 $A[\alpha|\beta]$ 为 A 的 r 阶可逆子阵, X 满足定理 1 中的条件(*), 则 $A^{(d)}=(I-X)[N|\beta](A[\alpha|\beta])^{-1}(I-X)[\alpha|N]$.

证明 令

$$P=\begin{pmatrix} A[\alpha|\beta] & (I-X)[\alpha|N] \\ (I-X)[N|\beta] & A^{(d)} \end{pmatrix},$$

则 $\operatorname{rank}(P)\geq\operatorname{rank}(A[\alpha|\beta])=r=\operatorname{rank}(A)$,

由定理 1 知

$$\operatorname{rank}(P)\leq\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & I-X \\ I-X & A^{(d)} \end{pmatrix}=\operatorname{rank}(A),$$

故 $\operatorname{rank}(P)=\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A[\alpha|\beta])$.

由引理知, $A^{(d)}=(I-X)[N|\beta](A[\alpha|\beta])^{-1}(I-X)[\alpha|N]$. $\square$

下面给出运用定理 2 求 $A^{(d)}$ 的具体算法步骤和一个算例.

算法 设 $A\in C^{n\times n}$.

1° 求矩阵指标 $\operatorname{ind}(A)=k$, A 的秩 $\operatorname{rank}(A)=r$, A^k 的秩 $\operatorname{rank}(A^k)=s$, 确定 α,β, 进而得到 $A[\alpha|\beta]$.

2° 计算 $(A[\alpha|\beta])^{-1}$.

3° 构造非奇异阵 T, 满足 $T^{-1}AT$ 为 A 的 Jordon 标准型, 计算 $X=T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}T^{-1}$.

4° 确定 $(I-X)[N|\beta]$, $(I-X)[\alpha|N]$.

5° 计算 $A^{(d)}=(I-X)[N|\beta](A[\alpha|\beta])^{-1}(I-X)[\alpha|N]$.

注 3°中构造 T 的方法可参见[1].

算例 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, 求 $A^{(d)}$.

解 1° $\operatorname{ind}(A)=2$, $\operatorname{rank}(A)=2$, $\operatorname{rank}(A^2)=1$. 取 $\alpha=\{1,2\}$, $\beta=\{1,2\}$, 则 $A[\alpha|\beta]=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2° 计算 $(A[\alpha|\beta])^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$.

3° 取 $T=\begin{pmatrix}8 & 0 & 0\\ -8 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, 则 $T^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{8} & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$,

$$X=T\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}T^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ I-X=T\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}T^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

4° 计算

$$(I-X)[N|\beta]=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix};\ (I-X)[\alpha|N]=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

5° 计算

$$\begin{aligned}A^{(d)}&=(I-X)[N|\beta](A[\alpha|\beta])^{-1}(I-X)[\alpha|N]\\ &=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

注 作为 D-逆的一种特殊情况, 本文中的结果对 A 的群逆 $A^{\#}$ 也是成立的.

参 考 文 献

[1] 何旭初, 孙文瑜, 广义逆矩阵引论, 江苏科学技术出版社, 1990.

[2] Mirosolaw Fiedler and Thomas L. Markham, *A characterization of the Moore-Penrose inverse*, Linear Algebra, Appl, 179(1993), 129-133.

A Characterization of the Drazin Inverse

Zhang Liping   Wang Yiju

(Institute of Operations Research, QuFu Normal University, Shandong 273165)

Abstract

For any matrix $A\in C^{n\times n}$ of order n, this paper proposes a characterization of Drazin inverse of A, and presents an algorithm to obtain the Drazin inverse of A.

Keywords Drazin inverse, algorithm, Jordon decomposition.