第16卷第4期　　数学研究与评论　　Vol.16 No.4
1996年11月　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　Nov. 1996

范畴 ${}_RM_n^l$ 上的一个函子及范畴 AG_{rn}^0 *

刘 于 人
(苏州大学数学系, 215006)

摘　要　本文定义了一个由范畴 ${}_RM_n^l$ 到范畴 AG_{rn}^0 的函子 G, 并证明了函子 G 保持分量正合及全正合. 关于范畴 AG_{rn}^0 证明了定理: 任意 $A\in \mathrm{ob}AG_{r,p+1}^0$, $|A|\neq 1$, 则 $A=\bigoplus_{\lambda\in I_0}^{a_0} A_\lambda$, $A_\lambda\cong Z_p$, 其中 p 为素数.

关键词　范畴 ${}_RM_n^l$, 函子 G, 范畴 AG_{rn}^0.
分类号　AMS(1991) 18B99/CCL O154

文[1]定义了一个由范畴 ${}_RM_n^l$ 到范畴 ${}_RM_n^{l'}$ 的函子 F. 本文在 ${}_RM_n^l$ 上定义另一函子 G.

AG_{rn}^0 表示 $A=\tilde{A}$ 的交换 n-群范畴, 这里 $\tilde{A}=\{a\,|\,a\in A, a=\bar{a}\}$.

令 $G:\mathrm{ob}_RM_n^l\to \mathrm{ob}AG_{rn}^0: M\to\tilde{M}$; 任意 $M, N\in \mathrm{ob}_RM_n^l$, $G:\mathrm{Hom}(M,N)\to \mathrm{Hom}(\tilde{M},\tilde{N}): f\to \tilde{f}$, 其中 $\tilde{f}=f|_{\tilde{M}}$.

任意 $M\in \mathrm{ob}_RM_n^l$, $\tilde{M}=\{m\,|\,m\in M, m=om\}$, 忘却其模运算, 则 $\tilde{M}$ 为交换 n-群, 且 $\tilde{\tilde{M}}=\tilde{M}$, 故 $\tilde{M}\in \mathrm{ob}AG_{rn}^0$. 取任意的 $f\in \mathrm{Hom}(M,N)$ 及任意的 $m\in\tilde{M}$, $\tilde{f}(m)=f|_{\tilde{M}}(m)=f(m)=f(om)=of(m)\in\tilde{N}$, 易知 $\tilde{f}$ 是 n-群同态, 故 $\tilde{f}\in \mathrm{Hom}(\tilde{M},\tilde{N})$. 又 $G(1_M)=1_M|_{\tilde{M}}=1_{\tilde{M}}$, $G(gf)=G(g)G(f)$. 综上, G 是 ${}_RM_n^l$ 到 AG_{rn}^0 的函子.

引理1　任意 $M, N\in \mathrm{ob}_RM_n^l$, 任意 $f\in \mathrm{Hom}(M,N)$, 则 $fi_{\tilde{M}}=i_{\tilde{N}}\tilde{f}$, 即右图可交换, 其中 $i_{\tilde{M}}:\tilde{M}\to M$, $i_{\tilde{N}}:\tilde{N}\to N$ 为嵌入映射.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ {\scriptstyle i_{\tilde{M}}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle i_{\tilde{N}}} \\ \tilde{M} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{N} \end{array}$$

定理1　在 ${}_RM_n^l$ 中, 若态列 $M_1\xrightarrow{f}M_2\xrightarrow{g}M_3$ 在 M_2 处关于 m_3 分量正合 ($m_3\in\tilde{M}_3$), 则态列 $\tilde{M}_1\xrightarrow{\tilde{f}}\tilde{M}_2\xrightarrow{\tilde{g}}\tilde{M}_3$ 在 $\tilde{M}_2$ 处亦关于 m_3 分量正合.

证明　由引理1知, 在 ${}_RM_n^l$ 中下图可交换:

$$\begin{array}{ccccc} M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 & \xrightarrow{g} & M_3 \\ \uparrow{\scriptstyle i_{\tilde{M}_1}} & & \uparrow{\scriptstyle i_{\tilde{M}_2}} & & \uparrow{\scriptstyle i_{\tilde{M}_3}} \\ \tilde{M}_1 & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{M}_2 & \xrightarrow{\tilde{g}} & \tilde{M}_3 \end{array}$$

* 1994年5月23日收到

其中 $i_{\tilde{M}_j}:\tilde{M}_j \to M_j$ 为嵌入映射, $j = 1, 2, 3$.

任取 $y \in \operatorname{Im}\tilde{f}$, 存在 $x \in \tilde{M}_1$, $y = \tilde{f}(x) = i_{\tilde{M}_2}\tilde{f}(x) = f\, i_{\tilde{M}_1}(x)$, 故 $y \in \operatorname{Im} f = g^{-1}(m_3)$, 又 $m_3 = gf\, i_{\tilde{M}_1}(x) = g\, i_{\tilde{M}_2}\tilde{f}(x) = i_{\tilde{M}_3}\tilde{g}\tilde{f}(x) = \tilde{g}\tilde{f}(x)$, 故 $y = \tilde{f}(x) \in \tilde{g}^{-1}(m_3)$.

对任意的 $y \in \tilde{g}^{-1}(m_3) \subseteq \tilde{M}_2$, $m_3 = \tilde{g}(y) = i_{\tilde{M}_3}\tilde{g}(y) = g\, i_{\tilde{M}_2}(y) = g(y)$, $y \in g^{-1}(m_3) = \operatorname{Im} f$, 故存在 $x \in M_1$, $y = f(x)$. 注意到 $ox \in \tilde{M}_1$, $y = oy = of(x) = f(ox) = f\, i_{\tilde{M}_1}(ox) = i_{\tilde{M}_2}\tilde{f}(ox) = \tilde{f}(ox)$, 即 $y \in \operatorname{Im}\tilde{f}$.

综上, $\operatorname{Im}\tilde{f} = \tilde{g}^{-1}(m_3)$, 即态列 $\tilde{M}_1 \xrightarrow{\tilde{f}} \tilde{M}_2 \xrightarrow{\tilde{g}} \tilde{M}_3$ 在 $\tilde{M}_2$ 处关于 m_3 分量正合.

定理 2 在 ${}_RM^l_n$ 中, 若态列 $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$ 为全正合列, 则态列 $\tilde{M}_1 \xrightarrow{\tilde{f}} \tilde{M}_2 \xrightarrow{\tilde{g}} \tilde{M}_3$ 亦为全正合列.

证明 注意到 $\tilde{\tilde{M}}_3 = \tilde{M}_3$, $\tilde{g}^{-1}(\tilde{\tilde{M}}_3) = \tilde{M}_2$, 故态列 $\tilde{M}_1 \xrightarrow{\tilde{f}} \tilde{M}_2 \xrightarrow{\tilde{g}} \tilde{M}_3$ 在 $\tilde{M}_2$ 处全正合当且仅当态 $\tilde{f}$ 是满的.

对任意的 $m_2 \in \tilde{M}_2$, $g(m_2) \in \tilde{M}_3$, $m_2 \in g^{-1}(\tilde{M}_3) = \operatorname{Im} f$, 故存在 $m_1 \in M_1$, $m_2 = f(m_1)$, 又 $om_1 \in \tilde{M}_1$, $m_2 = om_2 = of(m_1) = f(om_1) = f\, i_{\tilde{M}_1}(om_1) = i_{\tilde{M}_2}\tilde{f}(om_1) = \tilde{f}(om_1)$, 即态 $\tilde{f}$ 是满的, 从而态列 $\tilde{M}_1 \xrightarrow{\tilde{f}} \tilde{M}_2 \xrightarrow{\tilde{g}} \tilde{M}_3$ 在 $\tilde{M}_2$ 处全正合.

对任意的 $M \in \mathrm{ob}_R M^l_n$, 态列 $\tilde{M} \xrightarrow{i_{\tilde{M}}} M \xrightarrow{n_M} M/\tilde{M}$ 为全正合列, 其中 $i_{\tilde{M}}:\tilde{M} \to M$ 为嵌入映射, $n_M: M \to M/\tilde{M}: m \to [m]$ 为自然同态; 态列 $\{m_0\} \xrightarrow{\psi} \tilde{M} \xrightarrow{i_{\tilde{M}}} M \xrightarrow{n_M} M/\tilde{M} \xrightarrow{\varphi} \{m_0\}$ 在 $\tilde{M}$ 处关于 $\psi(m_0)$, 在 M 处关于 $i_{\tilde{M}}\psi(m_0) = \psi(m_0)$, 在 $M/\tilde{M}$ 处关于 $n_m i_{\tilde{M}}\psi(m_0) = [\psi(m_0)]$ 分量正合, $M/\tilde{M} = F(M) \in \mathrm{ob}_R M^{l'}_n$, $\tilde{M} = G(M) \in \mathrm{ob} A G^0_{rn} \cdot {}_RM^{l'}_n$ 与左 R-模范畴 ${}_RM$ 等价. 下文试图讨论范畴 AG^0_{rn}.

设 $A \in \mathrm{ob} AG^0_{rn}$, K 是 A 的 n-子群. 在 A 上建立等价关系 R: 任意 $a_1, a_2 \in A$, $a_1 R a_2$ 当且仅当 $a_1 = a_2 + k_1 + \cdots + k_{n-1}$, $k_i \in K$. 记 A/K 为 R 确定的等价类的集合, 任意 $a \in A$, a 所在的等价类记作 $[a]$. 在 $A/K = \{[a] \mid a \in A\}$ 上定义 n 元运算: $[a_1] + [a_2] + \cdots + [a_n] = [a_1 + a_2 + \cdots + a_n]$, 则 $A/K \in \mathrm{ob} AG^0_{rn}$, 称为 A 的 n^0-商群.

引理 2 设 $A \in \mathrm{ob} AG^0_{rn}$, A 为有限 n-群, K 是 A 的 n-子群, 则 $|A| = |A/K|\,|K|$.

证明 取 $k \in K$, $[k] = \{k + k_1 + \cdots + k_{n-1} \mid k_i \in K\} = K$, 任意 $[a] \in A/K$, $[a] = \{a + k_1 + \cdots + k_{n-1} \mid k_i \in K\}$.

令 $\varphi: a + k_1 + \cdots + k_{n-1} \to k + k_1 + \cdots + k_{n-1}$.

若 $a + k_1 + \cdots + k_{n-1} = a + k_1' + \cdots + k_{n-1}'$, $k_i, k_i' \in K$, 则 $a + k_1 + \cdots + k_{n-1} + \underbrace{k_1' + \cdots + k_1'}_{n-2} + \cdots + \underbrace{k_{n-1}' + \cdots + k_{n-1}'}_{n-2} = a$, 故 $k + k_1 + \cdots + k_{n-1} + \underbrace{k_1' + \cdots + k_1'}_{n-2} + \cdots + \underbrace{k_{n-1}' + \cdots + k_{n-1}'}_{n-2} = k$, 从而 $k + k_1 + \cdots + k_{n-1} = k + k_1' + \cdots + k_{n-1}'$. φ 是 $[a]$ 到 K 的映射, 易知, φ 是一一映射. 因而, $|A| = |A/K|\,|K|$.

定义 1 设 $A \in \mathrm{ob} AG^0_{rn}$, A 的 n-子群 A 及 $\{a_0\}$ 称为 A 的平凡 n^0-子群.

定义 2 设 $A \in \mathrm{ob} AG^0_{rn}$, $A \neq \{a_0\}$, A 称为 n^0-单群, 若 A 无非平凡 n^0-子群.

记 $Z_{n-1} = \{[a] \mid a \in Z\}$ 为模 $n-1$ 的剩余类集, 在 Z_{n-1} 上定义 n 元运算: $[a_1] + \cdots + [a_n]$

$= [a_1 + \cdots + a_n]$, 则 $Z_{n-1} \in \mathrm{ob}AG^0_{rn}$.

易知, 若 p 为素数, 则 Z_p 是 $(p+1)^0$- 单群.

设 $A \in \mathrm{ob}AG^0_{rn}$, $a_0 \in A$, $\{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ 是 A 的含 a_0 的 n- 子群之集, 定义:

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}^{a_0} A_\lambda = \{a \mid a \in \Lambda_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda\},$$

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}^{a_0} A_\lambda = \{a_{\lambda_1} + \cdots + a_{\lambda_s} + \underbrace{a_0 + \cdots + a_0}_{(s-1)(n-2)} \mid a_{\lambda_i} \in A_{\lambda_i}, s < \infty\},$$

则 $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}^{a_0} A_\lambda$ 与 $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}^{a_0} A_\lambda$ 是 A 的 n- 子群, 称 $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}^{a_0} A_\lambda$ 为诸 A_λ 关于 a_0 之交, 称 $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}^{a_0} A_\lambda$ 为诸 A_λ 关于 a_0 之和.

若 $B = \sum\limits_{\lambda\in\Lambda}^{a_0} A_\lambda$, 且 $a_0 = a_{\lambda_1} + \cdots + a_{\lambda_s} + \underbrace{a_0 + \cdots + a_0}_{(s-1)(n-2)}$, $i \neq j$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, 当且仅当 $a_{\lambda_i} = a_0$, $i = 1, 2, \cdots s$, 则称 B 为诸 A_λ 关于 a_0 的直和, 记作 $B = \bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda}^{a_0} A_\lambda$.

引理 3 设 $A \in \mathrm{ob}AG^0_{rn}$, $a_0 \in A$, $\{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ 是 A 的含 a_0 的 n- 子群集, $B = \sum\limits_{\lambda\in\Lambda}^{a_0} A_\lambda$, 则下列三命题等价:

(1) $B = \sum\limits_{\lambda\in\Lambda}^{a_0} A_\lambda$ 是诸 A_λ 关于 a_0 的直和.

(2) 任意 $\lambda \in \Lambda$, $A_{\lambda_0} \cap \sum\limits_{\lambda\neq\lambda_0}^{a_0} A_\lambda = \{a_0\}$.

(3) 若 $a_{\lambda_1} + \cdots + a_{\lambda_s} + \underbrace{a_0 + \cdots + a_0}_{(s-1)(n-2)} = b_{\lambda_1} + \cdots + b_{\lambda_s} + \underbrace{a_0 + \cdots + a_0}_{(s-1)(n-2)}$, $a_{\lambda_i}, b_{\lambda_i} \in A_{\lambda_i}$, $i \neq j$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, 则 $a_{\lambda_i} = b_{\lambda_i}$, $i = 1, 2, \cdots, s$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 设 $B = \sum\limits_{\lambda\in\Lambda}^{a_0} A_\lambda = \bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda}^{a_0} A_\lambda$, 任意 $\lambda_0 \in \Lambda$, 若 $a \in A_{\lambda_0} \cap \sum\limits_{\lambda\neq\lambda_0}^{a_0} A_\lambda$, $a = a_{\lambda_0} = a_{\lambda_1} + \cdots + a_{\lambda_s} + \underbrace{a_0 + \cdots + a_0}_{(s-1)(n-2)}$, $a_{\lambda_i} \in A_{\lambda_i}$, $i \neq j$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, 则 $a_0 = a_{\lambda_1} + \cdots + a_{\lambda_s} + (\underbrace{a_{\lambda_0} + \cdots + a_{\lambda_0}}_{n-2} + a_0 + a_0) + \underbrace{a_0 + \cdots + a_0}_{s(n-2)}$, 注意到 $\underbrace{a_{\lambda_0} + \cdots + a_{\lambda_0}}_{n-2} + a_0 + a_0 \in A_{\lambda_0}$, 故 $a_{\lambda_i} = a_0$, $i = 1, 2, \cdots, s$, $a = a_{\lambda_0} = \underbrace{a_0 + \cdots + a_0}_{(s-1)(n-1)} + a_0 = a_0$, 因而, $A_{\lambda_0} \cap \sum\limits_{\lambda\neq\lambda_0}^{a_0} A_\lambda = \{a_0\}$.

(2) $\Rightarrow$ (3) 设任意的 $\lambda_0 \in \Lambda$, $A_{\lambda_0} \cap \sum\limits_{\lambda\neq\lambda_0}^{a_0} A_\lambda = \{a_0\}$, 若 $a_{\lambda_0} + a_{\lambda_1} + \cdots + a_{\lambda_s} + \underbrace{a_0 + \cdots + a_0}_{s(n-2)} = b_{\lambda_0} + b_{\lambda_1} + \cdots + b_{\lambda_s} + \underbrace{a_0 + \cdots + a_0}_{s(n-2)}$, $a_{\lambda_i}, b_{\lambda_i} \in A_{\lambda_i}$, $i \neq j$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, $a_{\lambda_0} + \underbrace{b_{\lambda_0} + \cdots + b_{\lambda_0}}_{n-2} + a_0 = b_{\lambda_1} + \underbrace{a_{\lambda_1} + \cdots + a_{\lambda_1}}_{n-2} + \cdots + b_{\lambda_s} + \underbrace{a_{\lambda_s} + \cdots + a_{\lambda_s}}_{n-2} + a_0 \in A_{\lambda_0} \cap \sum\limits_{\lambda\neq\lambda_0}^{a_0} A_\lambda = \{a_0\}$, 故 $a_{\lambda_0} + \underbrace{b_{\lambda_0} + \cdots + b_{\lambda_0}}_{n-2} + a_0 = a_0$, 从而, $a_{\lambda_0} = a_{\lambda_0} + \underbrace{b_{\lambda_0} + \cdots + b_{\lambda_0}}_{n-2} + b_{\lambda_0} = b_{\lambda_0}$, 同理, $a_{\lambda_i} = b_{\lambda_i}$, $i = 1, 2,$

$\cdots, s$.

(3) ⇒ (1) 显然

$n = 2$, AG^0_{r2}:

任意 $A \in \mathrm{ob}AG^0_{r2}$, A 为通常的阿贝尔群, 任意 $a \in A$, $a + \bar{a} = a$, $\bar{a} = 0$, 又 $a = \bar{a}$, 故 $A = \{0\}$.

$n = p + 1$ (p 素数) $AG^0_{r,p+1}$:

引理 4 设 $A \in \mathrm{ob}AG^0_{r,p+1}$, A 为 $(p+1)^0$-单群, 当且仅当 $|A| = p$, 这里 p 是素数

证明 $A \in \mathrm{ob}AG^0_{r,p+1}$, 任取 $a_0, a_1 \in A$, $a_1 \neq a_0$, 令 $a_i = \underbrace{a_1 + \cdots + a_1}_{i} + \underbrace{a_0 + \cdots + a_0}_{p-i+1}$, $i = 2, 3, \cdots, p$, 则 $A_1 = \{a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}\}$ 是 A 的 $(p+1)$-子群, 又 $i \neq j$, $a_i \neq a_j$, 因为, 若 $a_i = a_j$, 即 $\underbrace{a_1 + \cdots + a_1}_{i} + \underbrace{a_0 + \cdots + a_0}_{p-i+1} = \underbrace{a_1 + \cdots + a_1}_{j} + \underbrace{a_0 + \cdots + a_0}_{p-j+1}$, 不妨设 $j > i$, 则 $a_0 = \underbrace{a_1 + \cdots + a_1}_{j-i} + \underbrace{a_0 + \cdots + a_0}_{p-(j-i)+1}$, 令 $k = j - i$, $(k, p) = 1$, 故存在 $s, t \in N$, 使 $sk = tp + 1$, $\overbrace{(\underbrace{a_1 + \cdots + a_1}_{k} + \underbrace{a_0 + \cdots + a_0}_{p-k+1}) + \cdots + (\underbrace{a_1 + \cdots + a_1}_{k} + \underbrace{a_0 + \cdots + a_0}_{p-k+1})}^{s} + \overbrace{a_0 + \cdots + a_0}^{(s-1)(p-1)} = \overbrace{a_0 + \cdots + a_0}^{s+(s-1)(p-1)}$, $a_1 = a_0$, 矛盾. 故 $A_1 = \{a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}\}$ 是 A 的 p 阶 $(p+1)$-子群, 且 $A_1 \cong Z_p$.

由此可知, A 为 $(p+1)^0$-单群当且仅当 $|A| = p$.

定理 3 设 $A \in \mathrm{ob}AG^0_{r,p+1}$, p 素数, $1 < |A| < \infty$, 则 $A = \mathop{\overset{a_0}{\oplus}}_{i=1,2,\cdots,s} A_i$, 其中 $a_0 \in A$, A_i 是 A 的含 a_0 的 $(p+1)^0$-单群, $i = 1, 2, \cdots, s$.

证明 由于 $a_0 \in A$, 由引理 4 的证明知, 存在 A 的 $(p+1)^0$-单群 A_1, $a_0 \in A_1$.

设 $B_k = \mathop{\overset{a_0}{\oplus}}_{i=1,2,\cdots,k} A_i$, 其中 A_i 是 A 的含 a_0 的 $(p+1)^0$-单群, $a_0 \in B_k$. 若 $A \neq B_k$, 取 $a_1 \in A$, $a_1 \notin B_k$, 令 $a_i = \underbrace{a_1 + \cdots + a_1}_{i} + \underbrace{a_0 + \cdots + a_0}_{p-i+1}$, 则 $a_i \notin B_k$, $i = 2, 3, \cdots, p-1$, 因为, 若 $a_i \in B_k$, $(i, p) = 1$, 则存在 $s, t \in N$, 使 $si = tp + 1$, 故 $a_1 = \overbrace{(\underbrace{a_1 + \cdots + a_1}_{i} + \underbrace{a_0 + \cdots + a_0}_{p-i+1}) + \cdots + (\underbrace{a_1 + \cdots + a_1}_{i} + \underbrace{a_0 + \cdots + a_0}_{p-i+1})}^{s} + \overbrace{a_0 + \cdots + a_0}^{(s-1)(p-1)} = \underbrace{a_i + \cdots + a_i}_{s} + \underbrace{a_0 + \cdots + a_0}_{(s-1)(p-1)} \in B_k$, 与 $a_1 \notin B_k$ 矛盾. 令 $A_{k+1} = \{a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}\}$, 则 A_{k+1} 为 A 的 $(p+1)^0$-单群. 令 $B_{k+1} = B_k \overset{a_0}{+} A_{k+1}$, 注意到 $B_k \cap A_{k+1} = \{a_0\}$, 于是 $B_{k+1} = B_k \overset{a_0}{\oplus} A_{k+1} = \mathop{\overset{a_0}{\oplus}}_{i=1,2,\cdots,k+1} A_i$, 因 $|A| < \infty$, 故存在 s, $A = B_s = \mathop{\overset{a_0}{\oplus}}_{i=1,2,\cdots,s} A_i$, A_i 是 A 的含 a_0 的 $(p+1)^0$-单群, $i = 1, 2, \cdots, s$.

定理 4 设 $A \in \mathrm{ob}AG^0_{r,p+1}$, p 素数, $|A| \neq 1$, 则 $A = \mathop{\overset{a_0}{\oplus}}_{\lambda \in I_0} A_\lambda$, 其中 $a_0 \in A$, 诸 A_λ 是 A 的含 a_0 的 $(p+1)^0$-单群.

证明 设 $\{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ 是 A 的所有含 a_0 的 $(p+1)^0$-单群之集, 由引理 4 证明知, $A =$

$\sum_{\lambda\in\Lambda}^{a_0} A_\lambda$

令 $\Omega = \{I \mid I \subseteq \Lambda, \sum_{\lambda\in I}^{a_0} A_\lambda = \bigoplus_{\lambda\in I}^{a_0} A_\lambda\}, \Omega \neq \varnothing$, Ω 关于集合的包含关系构成序集. 设 Γ 是 Ω 的任一全序子集, $\Gamma = \{I_k \mid k \in K\}$, 令 $J = \bigcup_{k\in K} I_k$, 则 $J \supseteq I_k, \forall k \in K$. 假设 $\sum_{\lambda\in J}^{a_0} A_\lambda$ 不是关于 a_0 的直和, 即有 $a_{\lambda_i} \in A_{\lambda_i}, \lambda_i \in J, a_0 = a_{\lambda_1} + \cdots + a_{\lambda_s} + \underbrace{a_0 + \cdots + a_0}_{(s-1)(p-1)}$, 但存在 $a_{\lambda_j} \neq a_0, 1 \leq j \leq s$. 设 $\lambda_i \in I_{k_i}, k_i \in K, i = 1, 2, \cdots, s$, 因 Γ 为全序集, 故存在 $I_{k_t} \in \Gamma, I_{k_t} \supseteq I_{k_i}, i = 1, 2, \cdots, s$, $\sum_{\lambda\in I_{k_t}}^{a_0} A_\lambda = \bigoplus_{\lambda\in I_{kt}}^{a_0} A_\lambda$, 此与假设矛盾. 因而, $\sum_{\lambda\in J}^{a_0} A_\lambda = \bigoplus_{\lambda\in J}^{a_0} A_\lambda, J \in \Omega$. 由 Zorn 引理, Ω 含极大元, 设为 I_0, 令 $B = \sum_{\lambda\in I_0}^{a_0} A_\lambda = \bigoplus_{\lambda\in I_0}^{a_0} A_\lambda, B$ 是 A 的 $(p+1)$-子群, 且 $a_0 \in B$. 任意 $u \in \Lambda$, 若 $u \in I_0$, 则 $A_u \subseteq B$, 若 $u \notin I_0$, 则 B 与 A_u 关于 a_0 的和 $B \overset{a_0}{+} A_u$ 不能是关于 a_0 的直和, 故 $B \cap A_u \neq \{a_0\}, B \cap A_u = A_u$, 即 $A_u \subseteq B$. 从而, $A \subseteq B, A = B = \bigoplus_{\lambda\in I_0}^{a_0} A_\lambda$

参 考 文 献

[1] 刘于人, 数学研究与评论, 1(1994), 65—68.

[2] 于永溪, 数学研究与评论, 4(1982), 21—30.

[3] 刘于人, 数学研究与评论, 4(1990), 565—569.

[4] 周伯埙, 同调代数, 科学出版社, 1988.

A Functor Defined on Category ${}_RM_n^l$ and Category AG_{rn}^0

Liu Yuren

(Dept. of Math., Suzhou Univ., 215006)

Abstract

In this paper, we define a functor G: ${}_RM_n^l \to AG_{rn}^0$ and prove that the functor G preserves component exactnesses and total exactnesses. Then we discuss the category AG_{rn}^0 and prove the following theorem: If $A \in \mathrm{ob}AG_{r,p+1}^0$, $|A| \neq 1$, then $A = \bigoplus_{\lambda\in I_0}^{a_0} A_\lambda, A_\lambda \cong Z_p$, where p is a prime number.

Keywords category ${}_RM_n^l$, functor G, category AG_{rn}^0.