第16卷第4期　　数学研究与评论　　Vol. 16 No. 4
1996年11月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Nov. 1996

非线性项有非线性增长的2阶泛函微分方程边值问题*

胡适耕

（华中理工大学数学系，武汉 430074）

摘　要　本文考虑下述2阶泛函微分方程边值问题：$x''(t)=f(t,x_t,x'(t))\ (0<t<b),x_0=\varphi,x(b)=B$. 对于$f$有非线性增长的情况，得出了上述问题可解的某些充分条件.

关键词　泛函微分方程，边值问题，非线性增长.

分类号　AMS(1991) 34K10/CCL O175.1

已有某些作者将基于度理论的不动点方法用于泛函微分方程边值问题[1-3]. 从已知文献看，这方面的结果要么依赖于方程右端的线性增长限制，要么依赖于某些难以验证的条件(如[3]).

本文考虑如下的泛函微分方程边值问题：

$$\begin{cases} x''(t)=f(t,x_t,x'(t))(0<t<b); & (1)\\ x_0=\varphi,x(b)=B. & (2)\end{cases}$$

在f具非线性增长的情况下，本文获得了问题(1)，(2)可解的易于检验的条件.

给定$r\geqslant 0$，令$C=C([-r,0],R^n)$. 在C中采用范数$|\varphi|=\sup\limits_{-r\leqslant t\leqslant 0}|\varphi(t)|$；任给$x\in R^n$，记$|x|=\sqrt{(x,x)}$，$(\cdot,\cdot)$记$R^n$中的标准内积. 设$b>0$，$J=[0,b]$，分别以$|\cdot|_0$与$|\cdot|_p(1\leqslant p\leqslant\infty)$记$C(J,R^n)$与$L^p(J,R^n)$中的sup范数与$L^p$范数.

以下设$f:J\times C\times R^n\to R^n$满足Caratheodory条件，其次设定以下条件：

(H)　存在$\alpha,\beta\geqslant 1,p,q,\omega\in L^1(J,R_+)$，使对任给$(t,\psi,y)\in J\times C\times R^n$有

$$|f(t,\psi,y)|\leqslant p(t)|\psi|^\alpha+q(t)|y|^\beta+\omega(t).$$

如所熟知，不失一般性，可将(2)代以如下较特殊的边界条件：

$$x_0=\varphi\in C;\ \varphi(0)=x(b)=0. \tag{3}$$

定理1　设f满足条件(H)，则以下每个条件推出问题(1)，(3)有解：

(i)　$1=\beta<\alpha,(\alpha b)^\alpha|\omega|_1^{\alpha-1}|p|_1<(\alpha-1)^{\alpha-1}(2-2|q|_1)^\alpha$.

(ii)　$1<\alpha=\beta\leqslant 2,(\alpha b)^\alpha|\omega|_1^{\alpha-1}[|p|_1+(2/b)^{\alpha/2}|q|_\sigma]<2^\alpha(\alpha-1)^{\alpha-1},\sigma=2/(2-\alpha)$.

(iii)　$1=\beta<\alpha,(\alpha b)^\alpha|\omega|_1^{\alpha-1}|p|_1<(\alpha-1)^{\alpha-1}(2-\sqrt{2b}|q|_2)^\alpha$.

(iv)　$\alpha>1,\beta=2,\alpha\sqrt{b/2}|\omega|_1<(\alpha-1)\mu+(2-\alpha)\mu^2|q|_2$，$\mu$是方程$\alpha|p|_1(b/2)^{(\alpha+1)/2}t^{\alpha-1}+2t|q|_2=1$的正根.

* 1994年4月5日收到. 96年6月16日收到修改稿.

(v) $\alpha>1$, $1<\beta\leqslant 3$, $a\sqrt{b/2}|\omega|_1<(\alpha-1)\mu(1-b^\tau\mu^{\beta-1}|q|_\infty)$, $\tau=(3-\beta)/2$, μ 是方程 $\alpha|p|_1(b/2)^{(\alpha+1)/2}t^{\alpha-1}+b^\tau t^{\beta-1}|q|_\infty=1$ 的正根，$|\varphi|=\mu\sqrt{b/2}$.

证明 1° 令 $X=\{x\in C^1(J,R^n):x(0)=x(b)=0\}$，$Y=L^1(J,R^n)$，$Z=\{x\in X:x'$绝对连续$\}$；在 X 中采用范数 $|x|_X=|x|_0+|x'|_0$. $\forall\, y\in Y$，以 Ky 记边值问题“$x''=y(t)$，$x(0)=x(b)=0$”的唯一解. 熟知 $Ky\in Z$，且

$$(Ky)(t)=\int_0^b G(t,s)y(s)ds; \tag{4}$$

$$G(t,s)=\begin{cases}s(t-b)/b,\ s\leqslant t;\\ t(s-b)/b,\ s>t.\end{cases} \tag{5}$$

由(4)，(5)直接看出 $K:Y\to X$ 为有界线性算子.

2° 任给 $x\in X$，x 有唯一扩张 $\bar{x}\in C([-r,b],R^n)$，使得 $\bar{x}_0=\varphi$ 约定 $x_t=\bar{x}_t$，则

$$|x_t|\leqslant\max\{|x|_0,|\varphi|\}(t\in J).$$

定义 $(Fx)(t)=f(t,x_t,x'(t))$，则 Fx 在 J 上可测，由(H)有

$$|(Fx)(t)|\leqslant p(t)(|x|_0+|\varphi|)^\alpha+q(t)|x'|_0^\beta+\omega(t)\in L^1(J). \tag{6}$$

(6)表明 $F:X\to Y$ 为有界映射. 易证 F 连续，于是 $T\triangleq KF:X\to X$ 为有界连续映射，且 $TX\subset Z$.

3° 任给有界集 $A\subset X$，令 $Q=TA$，$a=\sup\limits_{x\in A}|x|_X$，$m=\sup\limits_{z\in Q}|z|_X$. 设 $0\leqslant t<\tau\leqslant b$，$x\in A$，$z=Tx$，则 $z''=Fx$，

$$|z(t)-z(\tau)|=|\int_t^\tau z'(s)ds|\leqslant m(\tau-t);$$

$$|z'(t)-z'(\tau)|=|\int_t^\tau z''(s)ds|=|\int_t^\tau(Fx)(s)ds|$$

$$\leqslant\int_t^\tau[p(s)(a+|\varphi|)^\alpha+q(s)a^\beta+\omega(s)]ds.$$

(用(6))，由此看出 $Q\cup\{z':z\in Q\}$ 在 J 上等度连续，从而 Q 在 X 中相对紧. 这表明 T 全连续.

4° 取 $\rho,\mu>0$，ρ 充分大，μ 的取法待定. 令 $\Omega=\{x\in X:|x|_X<\rho,|x'|_2<\mu\}$. 易见 $x\to|x'|_2$ 连续，因此 Ω 是 X 中的有界开集. 若 $x=Tx\in\bar{\Omega}$，则由 T 与 $\bar{x}$ 的定义知 $\bar{x}$ 是问题(1)，(3)的解. 因此，只需证 $T:\bar{\Omega}\to X$ 有不动点. 由熟知的不动点结论(如参考[5])，只需证对适当选定的 μ，当 $x=\lambda Tx\in\overline{\partial\Omega}$，$\lambda\in[0,1]$时，必有 $x\in\Omega$.

以下设 $x=\lambda Tx\in\bar{\Omega}$，$0\leqslant\lambda\leqslant 1$，则 $x\in Z$，$x''=\lambda Fx$，即

$$x''(t)=\lambda f(t,x_t,x'(t)),\ \text{a.e.}\ (t\in J). \tag{7}$$

令 $r=|x'|_2$，则 $r\leqslant\mu$. 利用 $x(0)=x(b)=0$ 与 Hölder 不等式，易证 $|x|_0\leqslant r\sqrt{b/2}$；用分部积分得

$$r^2=-\int_0^b(x(t),x''(t))dt\leqslant|x|_0|x''|_1\leqslant r\sqrt{\frac{b}{2}}|x''|_1,$$

于是 $r\sqrt{2/b}\leqslant|x''|_1$. 利用(7)与条件(H)估计 $|x''|_1$：

$$|x''|_1\leqslant\int_0^b[p(t)|x_t|^\alpha+q(t)|x'(t)|^\beta+\omega(t)]dt$$

$$\leqslant|p|_1\max\{(r\sqrt{\frac{b}{2}})^\alpha,|\varphi|^\alpha\}+I+|\omega|_1,$$

其中 $I=\int_a^b q(t)|x'(t)|^\beta dt$. 下面设 $|\varphi|\leqslant r\sqrt{b/2}$（在相反的情况下证明更容易），于是有

$$r\sqrt{\frac{2}{b}}\leqslant|x''|_1\leqslant|p|_1(r\sqrt{\frac{b}{2}})^\alpha+I+|\omega|_1. \tag{8}$$

下面在条件(i)－(v)之下分别估计 I 并证 $x\in\Omega$.

5° 设条件(i)满足，则必 $|q|_1<1$, $I\leqslant|q|_1|x'|_0$. 由 $x'=(Kx'')'$ 与(4)，(5)有

$$|x'(t)|\leqslant\int_0^b|\partial_t G(t,s)x''(s)|ds\leqslant|x''|_1,$$

于是 $|x'|_0\leqslant|x''|_1$，从而 $I\leqslant|q|_1|x''|_1$；代入(8)得

$$(1-|q|_1)|x''|_1\leqslant|p|_1(r\sqrt{\frac{b}{2}})^\alpha+|\omega|_1;$$

$$0\leqslant|p|_1(r\sqrt{\frac{b}{2}})^\alpha-r(1-|q|_1)\sqrt{\frac{2}{b}}+|\omega|_1\stackrel{\triangle}{=}g_1(r).$$

可设 $|p|_1>0$（否则证明更直接）. 取 μ 为 $g_1'(t)$ 的唯一正零点. 用条件(i)不难直接验知 $g_1(\mu)<0$. 因 $r\leqslant\mu$ 且 $g_1(r)\geqslant0$，故必 $r<\mu$，而

$$|x|_X\leqslant r\sqrt{\frac{b}{2}}+|x''|_1\leqslant\mu\sqrt{\frac{b}{2}}+(1-|q|_1)^{-1}[|p|_1(\mu\sqrt{\frac{b}{2}})^\alpha+|\omega|_1]<\rho,$$

（注意 ρ 充分大！），因此 $x\in\Omega$.

6° 设条件(ii)满足，则用 Hölder 不等式得

$$I\leqslant|q|_\sigma[\int_0^b|x'(t)|^{\alpha\cdot2/\alpha}dt]^{\alpha/2}=|q|_\sigma r^\alpha,$$

其中用到 $1-\sigma^{-1}=\alpha/2$. 代入(8)得

$$0\leqslant[|p|_1(\sqrt{\frac{b}{2}})^\alpha+|q|_\sigma]r^\alpha-r\sqrt{\frac{2}{b}}+|\omega|_1\stackrel{\triangle}{=}g_2(r).$$

取 μ 为 $g_2'(t)$ 的唯一正零点，则条件(ii)推出 $g_2(\mu)<0$，于是同样有 $r<\mu$, $|x|_X<\rho$，从而 $x\in\Omega$.

7° 设条件(iii)满足，是直接用 Hölder 不等式得 $I\leqslant r|q|_2$；代入(8)得

$$0\leqslant|p|_1(r\sqrt{\frac{b}{2}})^\alpha-(\sqrt{\frac{2}{b}}-|q|_2)r+|\omega|_1\stackrel{\triangle}{=}g_3(r).$$

取 μ 为 $g_3'(t)$ 的唯一正零点（注意 $|q|_2<\sqrt{2/b}$），则条件(iii)推出 $g_3(\mu)<0$，于是如同前段一样有 $x\in\Omega$.

8° 设条件(iv)满足，取 μ 如条件(iv)，则

$$I=\int_0^b q(t)|x'(t)|^2dt\leqslant|x'|_0|q|_2r\leqslant r|q|_2|x''|_1.$$

必定 $\mu|q|_2<1$，因此由上式与(8)可得

$$0\leqslant|p|_1(r\sqrt{\frac{b}{2}})^\alpha-r\sqrt{\frac{2}{b}}(1-r|q|_2)+|\omega|_1\stackrel{\triangle}{=}g_4(r).$$

注意 $g_4'(\mu)=0$. 因条件(iv)推出 $g_4(\mu)<0$，故同样有 $x\in\Omega$.

9° 设条件(v)满足，μ,τ 依条件(v). 则

$$I \leqslant |q|_\infty |x'|_0 \int_0^b |x'(t)|^{\beta-1} dt \leqslant |q|_\infty |x''|_1 b^\tau [\int_0^b |x'(t)|^2 dt]^{(\beta-1)/2}$$
$$= b^\tau r^{\beta-1} |q|_\infty |x''|_1 \leqslant b^\tau \mu^{\beta-1} |q|_\infty |x''|_1.$$

其中用到 $1-\tau=(\beta-1)/2$. 因 $b^\tau \mu^{\beta-1}|q|_\infty<1$,故由上式与(8)可得

$$0 \leqslant |p|_1 (r\sqrt{\frac{b}{2}})^\alpha - r\sqrt{\frac{b}{2}}(1-b^\tau \mu^{\beta-1}|q|_\infty)+|\omega|_1 \triangleq g_5(r).$$

由条件(v)推出 $g_5(\mu)<0$,故同样有 $x\in\Omega$.

定理2 设 f 满足条件

(H′) 存在 $\alpha,\beta\geqslant 1, p,q\in L^1(J,R_+)$,使对任给 $t\in J,\psi,\overline{\psi}\in C,y,\overline{y}\in R^n$ 有

$$|f(t,\psi,y)-f(t,\overline{\psi},\overline{y})| \leqslant p(t)|\psi-\overline{\psi}|^\alpha + q(t)|y-\overline{y}|^\beta.$$

若取 $\omega(t)=|f(t,0,0)|$ 时定理1中条件(i)－(v)之一满足,则问题(1),(3)有解,且满足条件 $|x'|_2\leqslant\mu/2$ 的解 x 至多一个,μ 分别依定理1之证的5°—9°段.

证明 显然(H′)⇒(H),故由定理1得出可解性.设 y,z 是问题(1),(3)的解且 $|y'|_2$, $|z'|_2\leqslant\mu/2$. 令 $x=y-z, r=|x'|_2$,则 $x\in X, |x|_0\leqslant r\sqrt{b/2}, |x'|_0\leqslant|x''|_1, r\leqslant\mu$,

$$|x''(t)| = |f(t,y_t,y'(t)) - f(t,z_t,z'(t))| \leqslant p(t)|x_t|^\alpha + q(t)|x'(t)|^\beta$$
$$\leqslant p(t)|x|_0^\alpha + q(t)|x'(t)|^\beta.$$

如同证定理1一样得出与(8)类似的

$$\sqrt{\frac{2}{b}}r \leqslant |x''|_1 \leqslant |p|_1(r\sqrt{\frac{b}{2}})^\alpha + \int_0^b q(t)|x'(t)|^\beta dt. \tag{9}$$

若定理1之条件(i)满足,则由(9)得出

$$0 \leqslant |p|_1(r\sqrt{\frac{b}{2}})^\alpha - r(1-|q|_1)\sqrt{\frac{b}{2}} \triangleq h_1(r).$$

因 h_1 在 $(0,\mu)$ 内严格减,故 $t\in(0,\mu]$ 时 $h_1(t)<h_1(0)=0$,而 $h_1(r)>0$,因此 $r=0$,从而 $x'\equiv 0$,这推出 $y\equiv z$. 当条件(ii)－(v)之一满足时证明是类似的.

作为应用,考虑边值问题

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t-\tau(t)), x'(t))(0<t<b); & (10) \\ x_0 = \varphi \in C,\ \varphi(0) = x(b) = 0, & (11) \end{cases}$$

其中 $f: J\times R^{2n}\to R^n$ 满足 Caratheodory 条件,$\tau(\cdot)\in C(J,[0,r])$. 若令

$$\widetilde{f}(t,\psi,y)=f(t,\psi(-\tau(t)),y),$$

则(10)可写成

$$x''(t)=\widetilde{f}(t,x_t,x'(t)),$$

于是从定理1得出:

推论 设存在 $\alpha,\beta\geqslant 1, p,q,\omega\in L^1(J,R_+)$,使得 $|f(t,x,y)|\leqslant p(t)|x|^\alpha+q(t)|y|^\beta+\omega(t)(t\in J,x,y\in R^n)$;定理1中条件(i)－(v)之一满足,则问题(10),(11)有解.

参 考 文 献

[1] M. Faheem & M. R. M. Rao, *A boundary value problem for functional differential equations of delay type*, J. Math. Anal. Appl., 109(1985), 258—278.

[2] S. Ntouyas & P. Tsamatos, *Existence of solutions of boundary value problems for functional differential equations*, Int. J. Math., 14(1991), 509—516.

[3] S. Ntouyas, Y. Sficas & P. Tsamatos, *An existence principle for boundary value problems for second order functional differential equations*, Nonlinear Anal., 20(1993), 215—222.

[4] J. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer, Berlin, 1977.

[5] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer, Berlin, 1985.

Boundary Value Problems for Second Order Functional Differential Equations with Nonlinearily Growthing Nonlinear Term

Hu Shigeng

(Dept. of Math., Huazhong University of Science and Technology, 430074)

Abstract

This paper considers the following boundary value problem for second order functional differential equation: $x''(t) = f(t, x_t, x'(t))(0 < t < b), x_0 = \varphi, x(b) = B$. For the case that f has nonlinear growth, some sufficient conditions for solvability of the above problem are obtained.

Keywords functional differential equation, boundary value problem, nonlinear growth.