第16卷第4期 数学研究与评论 Vol. 16 No. 4
1996年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1996

关于Brauer定理的注记*

逄明贤
(吉林师范学院数学系，吉林市132011)

摘 要 本文讨论了经典的Brauer定理中的错误，指出产生错误的原因，并给出修正的结果.

关键词 Brauer定理，不可约矩阵，Cassini卵形域，Taussky定理.
分类号 AMS(1991) 15A57/CCL O151.21

熟知，n阶复方阵$A=(a_{ij})$之特征值估计中，最基本的是Gerschgorin圆盘定理：

$$\sigma(A)\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}G_i,\ G_i:|z-a_{ii}|\leqslant\Lambda_i=\sum_{j\neq i}|a_{ij}|,\quad i\in N,$$

这里$\sigma(A)$表A的谱(即特征值集合)，$N=\{1,\cdots,n\}$. A. Brauer改进了这一基本定理，得到了著名的Cassini卵形域包含定理[1]：$\sigma(A)\subseteq\bigcup_{i\neq j}G_{ij}=G$，$G_{ij}:|z-a_{ii}||z-a_{jj}|\leqslant\Lambda_i\Lambda_j$，$i,j\in N$，$i\neq j$. 通常称$G_{ij}$为Cassini卵形域，$i,j\in N$，$i\neq j$. 文[1]还给出下述著名结果：若$A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$不可约，$\lambda\in\sigma(A)\cap\overline{G}$(表$G$之边界)，则$\lambda\in\overline{G}_{ij}$，$i,j\in N$，$i\neq j$. 称为Brauer定理.

[2]指出Brauer定理结论不真，但误为[3]的推断，也未讨论产生错误的原因. 本文先来讨论产生错误的原因.

[1]在上述定理的证明中，假定$\lambda\in\sigma(A)\cap\overline{G}$，相应的特征向量$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$满足$|x_r|\geqslant|x_s|=\max_{i\in N\setminus\{r\}}|x_i|$. 由$Ax=\lambda x$推出，当$x_s\neq0$时，有

$$|\lambda-a_{rr}||x_r|\leqslant\Lambda_r\cdot|x_s|,\tag{1}$$

$$|\lambda-a_{ss}||x_s|\leqslant\Lambda_s\cdot|x_r|,\tag{2}$$

$$|\lambda-a_{rr}||\lambda-a_{ss}|\leqslant\Lambda_r\Lambda_s.\tag{3}$$

因$\lambda\in\overline{G}\cap G_{rs}$，故$\lambda\in\overline{G}_{rs}$，即(3)为等式. 由$A$不可约，对$r$有$r_1,r_2,\cdots,r_\alpha$使$a_{rj}\neq0$，$j=r_1,r_2,\cdots,r_\alpha$，$\alpha>0$；对$s$有$s_1,s_2,\cdots,s_\beta$使$a_{sk}\neq0$，$k=s_1,s_2,\cdots,s_\beta$，$\beta>0$. 由(3)为等式，必同时有

$$|x_s|=|x_{r_1}|=|x_{r_2}|=\cdots=|x_{r_\alpha}|,\quad |x_r|=|x_{s_1}|=|x_{s_2}|=\cdots=|x_{s_\beta}|.$$

因$|x_s|\geqslant\max_{i\in N\setminus\{r\}}|x_i|$，于是Brauer断言

$$|x_r|=|x_s|=|x_{r_1}|=|x_{r_2}|=\cdots=|x_{r_\alpha}|=|x_{s_1}|=|x_{s_2}|=\cdots=|x_{s_\beta}|.\tag{4}$$

由Taussky定理[1]知，这实际上是肯定(3)为等式，必(1)，(2)皆为等式，即若$\lambda\in\overline{G}_{rs}$，必同时有$\lambda\in\overline{G}_r$，$\lambda\in\overline{G}_s$. 很遗憾，这是错误的推导. 例如$s=r_1,r_2,\cdots,\cdots,r_\alpha$或$r=s_1,s_2,\cdots,s_\beta$就未必成立(4)式. 如下面反例

* 1994年1月5日收到.

$$A=\begin{pmatrix}1.5 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

易见 A 不可约,其特征值 $\lambda=0$ 相应特征向量为 $x=(-2,1,1,1)^T$. A 之 6 个 Cassini 卵形域为

$$G_{12}: |z-1.5||z-4|\leqslant 3\times 2,\qquad G_{13}: |z-1.5||z-2|\leqslant 3\times 1,$$
$$G_{14}: |z-1.5||z-2|\leqslant 3\times 1,\qquad G_{23}: |z-4||z-2|\leqslant 2\times 1,$$
$$G_{24}: |z-4||z-2|\leqslant 2\times 1,\qquad G_{34}: |z-2||z-2|\leqslant 1\times 1.$$

易见 $\lambda\in\overline{G}(\lambda\in\overline{G}_{12},\overline{G}_{13},\overline{G}_{14})$,但 G_{23},G_{24},G_{34} 皆不包含点 $\lambda=0$. 同时知 $r=1,s=2$ 或 $s=3,s=4$ 皆可. 显然 $2=|x_r|>1=|x_s|$. 且此时由 $a_{12}\neq 0,a_{13}\neq 0,a_{14}\neq 0$ 及 $|x_{r_1}|=|x_2|=|x_{r_2}|=|x_3|=|x_{r_3}|=|x_4|=1=|x_s|$ 知 $r_1=r_2=r_3=s$. 虽然 $\lambda=0\in\overline{G}_{12}$,但 $\lambda\notin\overline{G}_1(\in G_1)$,$\lambda\notin\overline{G}_2(\notin G_2)$. 同样有 $\lambda\in\overline{G}_{13}$,但 $\lambda\notin\overline{G}_3(\notin G_3)$;$\lambda\in\overline{G}_{14}$,但 $\lambda\notin\overline{G}_4(\notin G_4)$.

在什么条件下 Brauer 定理成立? 得到

定理 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$ 不可约,$n>2$. 则 $\lambda\in\sigma(A)\cap\overline{G}_{ij},i,j\in N,i\neq j$,充分而且必要 $\lambda\in\overline{G}_i,i\in N$.

证明 只须证明必要性. 设 $Ax=\lambda x,x=(x_1,\cdots,x_n)^T$ 满足 $|x_r|\geqslant|x_s|=\max\limits_{i\in N\setminus\{r\}}|x_i|$. 由 $\lambda\in G_r$ 及 $\lambda\in\overline{G}_{rs}$,知仅有下述两种情况:

1) $\lambda\in\overline{G}_r$,由 Taussky 定理知 $\lambda\in\overline{G}_i,i\in N$. 2) $\lambda\notin\overline{G}_r$,必位于 G_s 的内部,即 $|\lambda-a_{ss}|<\Lambda_s$. 又由 $\lambda\in\overline{G}_{rs}$ 知必有 $|\lambda-a_{rr}|>\Lambda_r$ 或 $\lambda\notin G_r$. 因 $n>2$,又有 $t\in N\setminus\{r,s\}$ 使 $\lambda\in\overline{G}_{rt}$. 于是同上述一样可推得 $\lambda\notin G_t$. 因 $G_{rt}\subseteq G_r\cup G_t$,导出 $\lambda\notin G_{rt}$. 此为矛盾. 故 2)不成立. 证毕.

上述 Brauer 定理的错误结果,还使[5]之定理 6 的后半部分结论同样是不成立的.

参 考 文 献

[1] A. Brauer, *On the characteristic roots of nonnegative matrices*, Recent Advances in the Matrix Theory, 1964, 3—38.

[2] 张垚, 计算数学, 13:3(1991).

[3] 沈光星, 计算数学, 12:2(1990), 132—135.

[4] A. Berman and R. J. Plemmons, *Nonegative Matrix in the mathematical Science*, Academic Press, New York, 1979.

[5] D. G. Feingold and R. S. Varga, Pacific J. Math., 12(1962), 1241—1249.

Note on Brauer's Theorem

Pang Mingxian

(Dept. of Math., Jilin Teachers'College, 132011)

Abstract

In this paper, we discuss wrong conclusion of Brauer's theorem, point out reason of incorrectness, give the corresponding revised result.

Keywords Brauer's theorem, irreducible matrix, cassini egg region, Taussky's theorem