第16卷第4期 数学研究与评论 Vol. 16 No. 4
1996年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1996

C-余弦算子函数的谱*

王 海 燕
(东南大学数学力学系，南京 210096)

关键词 C-余弦算子函数，谱.
分类号 AMS(1991) 47D05/CCL O177.1

设 X 是 Banach 空间，C 是 X 上有界单射线性算子，$C(t),t\in R$ 为 X 上 C-余弦算子函数[1],[2]，A 为其母元. 定义闭线性算子 T 的 C-预解集，$\rho^c(T)$，C-谱 $\sigma^c(T)$ 及 C-点谱 $\sigma_p^c(T)$ 分别为

$$\rho^c(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}\,|\,\lambda-T\text{ 是单射，且 }R(\lambda-T)\supseteq R(T)\},$$
$$\sigma^c(T)=\mathbf{C}\backslash\rho^c(T),$$
$$\sigma_p^c(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}\,|\,\lambda-T\text{ 不是单射}\}.$$

则(无界)余弦算子函数 $C(t)C^{-1},t\in R$ 与其母元 A 之间有以下谱映射关系：

定理 1 $\mathrm{ch}(t\sqrt{\sigma^c(A)})\subseteq\sigma(C(t)C^{-1}),\ t\in R.$

定理 2 $\mathrm{ch}(t\sqrt{\sigma_p(A)})\subseteq\sigma_p(C(t)C^{-1})\subseteq\mathrm{ch}(t\sqrt{\sigma_p(A)})\cup\{0\},\ t\in R.$

定理 3 令

$$Z=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\},\lambda_k=\lambda+2k\pi/t,k\in Z,$$
$$Q_kx=\frac{1}{t}\int_0^t\mathrm{sh}\lambda_k(t-s)C(s)x\,ds,$$
$$P_kx=\frac{1}{t}\int_0^t\mathrm{ch}\lambda_k(t-s)C(s)(t-s)x\,ds,$$

若

(i) $\mathrm{ch}\lambda\in\rho(C(t)C^{-1})$;

(ii) $\{\lambda_k^2:k\in Z\}\subset\rho^c(A)$ 且对任给 $x\in R(C),\lambda\notin\frac{2\pi i}{t}Z$,

$$(C,1)-\sum_{k\in Z}\lambda_kR(\lambda_k^2,A)Cx\in R(C);$$

对任何 $x\in R(C),\lambda\in\frac{2\pi i}{t}Z$,

$$(C,1)-\sum_{k\in Z}[R(\lambda_k^2,A)-2(\lambda_kR(\lambda_k^2,A))^2]Cx\in R(C);$$

(iii) $\{\lambda_k^2:k\in Z\}\subset\rho^c(A)$ 且对任给 $x\in R(C),\lambda\notin\frac{2\pi i}{t}Z$,

* 1994年5月23日收到. 96年6月27日收到修改稿. 国家自然科学青年基金资助项目.

$$(C,1)-\sum_{k\in Z}\lambda_k R(\lambda_k^2,A)Q_k x\in R(C);$$

对任何 $x\in R(C),\lambda\in\frac{2\pi i}{t}Z$,

$$(C,1)-\sum_{k\in Z}[R(\lambda_k^2,A)-2(\lambda_k R(\lambda_k^2,A))^2]P_k x\in R(C);$$

(iv) $\mathrm{ch}\lambda t\in\rho^{c^2}(C(t)C^{-1})$.

则(i)⇒(ii)⇔(iii)⇒(iv).

注 定理 3 的证明过程中用到了以下等式:

$$(\lambda^2-A)^2\int_0^t \mathrm{ch}\lambda(t-s)C(s)(t-s)x\,ds-\lambda t\,\mathrm{sh}\lambda t(\lambda^2-A)Cx$$
$$=-(\lambda^2+A)(\mathrm{ch}\lambda t C-C(t))x,\ t\in R,\lambda\in\mathbf{C},x\in X.$$

参 考 文 献

[1] Wang Haiyan, Wang Shengwang, *C-cosine operator functions and the applications to the second order abstract Cauchy problem*, Functional Analysis in China, Kluwer Academic Publishers, 1996, 333—350.

[2] Wang Haiyan, *C-cosine operator functions and the second order abstract Cauchy problem*, Northeast Math. J., 11(1995), 85—94.

[3] R. Nagel, *One-Parameter Semigroup of Positive Operator*, LNM 1184, Springer-Verlag, 1986.

On the Spectrum of Strongly Continuous C-Cosine Operator Functions

Wang Haiyan

(Southeast University, Nanjing 210096)

Abstract

Let A be the generator of a C-cosine operator functions $C(t)$ on a Banach space X. The spectrum characterization of (unbounded) cosine operator function $C(t)C^{-1}$ on $R(C^2)$ is derived. In particular, we characterize the spectrum of strongly continuous cosine operator function on a Banach space.

Keywords strongly continuous consine operator function, spectrum.