

Thompson 型广义 g -奇异值交错不等式*

伍 俊 良

(重庆大学工商管理学院, 630044)

关键词 g -奇异值, 交错不等式

分类号 AM S(1991) 15A 18/CCL O 151. 21

R. C. Thompson 在[1]中得到一个著名的奇异值交错不等式, 即

定理 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 它的奇异值为: $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_{\min(m, n)}$, B 是 A 的 $p \times q$ 阶子矩阵, 它的奇异值为 $\beta_1 \geq \dots \geq \beta_{\min(p, q)}$, 那么,

$$\begin{aligned}\alpha_i &\geq \beta_i, & i = 1, 2, \dots, \min(p, q), \\ \beta_i &\geq \alpha_{i + (m-p) + (n-q)}, & i \leq \min(p + q - m, p + q - n).\end{aligned}$$

文[2]作者将该定理推广到四元数体上. 值得注意的是文[1], [2]两个类似定理均隐含条件: $\max(m, n) \leq p + q \leq m + n$, 如果忽略这一点, 定理将存在较大的局限性. 因为当 $p + q \leq m$ 或 $p + q \leq n$ 时, 结论第二部分失去意义.

本文得到一个新的奇异值交错不等式, 即广义 g -奇异值交错不等式, 它的形式与 Thompson 奇异值交错不等式完全一致.

定义^[3] 设 $x \in \mathbb{C}^s, g: \mathbb{C}^s \rightarrow \mathbb{R}, g(x_1, \dots, x_s) = \left(\sum_{i=1}^s |x_i|^p\right)^{1/p}, p \geq 1, g$ 为对称规度函数. 对任意 $m \times n$ 阶 ($m \leq n$) 矩阵 B , 设它的奇异值为 $\tau_1 \geq \dots \geq \tau_n \geq 0$, 则定义 B 的 g -范数和 B 的广义 g -奇异值分别为: $\|B\|_g = g(\tau_1, \dots, \tau_n), \gamma_k = \frac{C_k(B)}{C_{k-1}(B)_g}, k = 1, 2, \dots, n$, 其中 $C_k(B)$ 表示 B 的 k 级复合阵, $C_0(B) = (1)$.

在此定义下, 附加条件 $\max(m, n) \leq p + q \leq m + n$, 有如下:

定理 1 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 它的广义 g -奇异值为 $\gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_{\min(m, n)}$, B 是 A 的 $p \times q$ 阶子矩阵, 它的广义 g -奇异值为: $\gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_{\min(p, q)}$, 那么

$$\begin{aligned}\gamma_k &\geq \beta_k, & k = 1, 2, \dots, \min(p, q), \\ \gamma_k &\geq \gamma_{k + (m-p) + (n-q)}, & k \leq \min(p + q - m, p + q - n).\end{aligned}$$

参 考 文 献

- [1] R. C. Thompson, *Principal submatrices IX*, Linear Alg Appl, 1- 12, 1972
- [2] 庄瓦金, 数学进展, 4(1988), 405- 406
- [3] D. K. Heaal, W immer, J. Math. Anal Appl, 137(1989) 181- 184

* 1994 年 3 月 30 日收到 1996 年 4 月 16 日收到修改稿