第17卷第1期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 17 No. 1
1997年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 1997

关于多项式系数微分方程复振荡理论的两个结果*

陈 宗 煊
(江西师范大学数学系, 南昌330027)

摘 要 本文证明了: 如果 $a_{k-j}\,(j=1,\cdots,k)$ 为多项式, $\deg a_{k-j}=n_{k-j}$, 存在某个 a_{k-s} $(1\le s\le k)$ 满足: 当 $1\le j<s$ 时, $n_{k-j}/j\le n_{k-s}/s$; 当 $s<j\le k$ 时, $n_{k-j}<n_{k-s}-(j-s)$. 如果 $F\not\equiv 0$ 是整函数且满足 $\sigma(F)=\beta<(n_{k-s}+s)/s$, 那么微分方程

$$f^{(k)}+a_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+a_0f=F$$

的解满足 $\overline{\lambda}(f)=\lambda(f)=\sigma(f)=(n_{k-s}+s)/s$, 或满足 $\sigma(f)=\beta$

关键词 线性微分方程, 整函数, 零点, 级

分类号 AMS(1991) 34A20, 30D35/CCL O175

§1 引言与结果

本文使用值分布论的标准记号(见[1, 5, 10]).

文[2, 4, 7]研究了微分方程

$$f^{(k)}+a_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+a_0f=p_1(z)e^{p_0(z)} \tag{1.1}$$

的复振荡理论, 其中 $a_{k-1},\cdots,a_0,p_1(z),p_0(z)$ 为多项式, 其中系数 a_0 的次数对于其结果起着主要影响, 其自由项 $p_1e^{p_0}$ 是仅有有限多个零点的整函数. 在本文中, 将其推广到更一般的情况, 以某个 a_{k-s} 替换 a_0, 即存在某个 $a_{k-s}\,(1\le s\le k-1)$, a_{k-s} 的次数对方程解的振荡性质起主要影响, 并将自由项推广到一般的整函数. 证明了下面定理.

定理1 假设 $a_{k-j}\,(j=1,\cdots,k)$ 为多项式, $\deg a_{k-j}=n_{k-j}$, 存在某个 $a_{k-s}\,(1\le s\le k)$ 满足: 当 $1\le j<s$ 时, $n_{k-j}/j\le n_{k-s}/s$; 当 $s<j\le k$ 时, $n_{k-j}<n_{k-s}-(j-s)$. 假设 $F(z)\not\equiv 0$ 为整函数, 且 $\sigma(F)=\beta<(n_{k-s}+s)/s$, 那么微分方程

$$f^{(k)}+a_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+a_{k-s}f^{(k-s)}+\cdots+a_0f=F \tag{1.2}$$

的解 f 为整函数, 满足

$$\overline{\lambda}(f)=\lambda(f)=\sigma(f)=(n_{k-s}+s)/s; \tag{1.3}$$

或者满足 $\sigma(f)=\beta$. 而且当 $n_{k-s}\ge 1$ 时, 满足(1.3)式的解一定存在. 而满足 $\sigma(f)=\beta$ 的任意二个解 f_0 与 f^* 最多相差一个多项式且 $\deg(f_0-f^*)<k-s$.

进一步, 如果还满足① $k-s=0$; 或者② $k-s=1$, $a_0\not\equiv 0$; 或者③ $k-s\ge 2$, $a_0\not\equiv 0$, $a_0,\cdots,a_{k-s-1}$ 的次数满足 $n_{k-t}-(k-t)\,(t=(s+1),\cdots,k)$ 互不相等, 那么(1.2)最多一个例外解 f_0, $\sigma(f_0)=$

* 1994年4月5日收到. 1996年6月收到修改稿. 国家自然科学基金及江西省自然科学基金资助课题

β, 其它所有解满足(1.3).

定理2 假设 $a_{k-j}(j=1,\cdots,k)$ 为多项式, 且 $\deg a_{k-j}=n_{k-j}$, 存在某 $a_{k-s}(1\leq s\leq k)$ 满足: 当 $j\neq s$ 时有 $n_{k-j}/j<n_{k-s}/s$. 假设 $F(z)\not\equiv 0$ 为整函数, 且 $\sigma(F)=\beta=(n_{k-s}+s)/s$, 则方程(1.2)的所有解 f 为整函数, 且 $\sigma(f)=(n_{k-s}+s)/s$.

如果 $\lambda(F)=\sigma(F)$, 那么所有解满足 $\lambda(f)=\sigma(f)$.

如果 $\lambda(F)<\sigma(F)$, $F=z^mQ(z)e^{p(z)}$ (m 为非负整数, $Q(z)$ 为 F 的非零零点构成的典型乘积或多项式, $\sigma(Q)<\sigma(F)$, $p(z)$ 为次数等于 β 的多项式), 那么当 $\deg(a_{k-s}+(p'(z))^s)=n_{k-s}$ 时, 方程(1.2)最多有一个例外解 f_0 满足 $\lambda(f_0)=\lambda(F)$ (当 F 仅有有限多个零点时, f_0 也仅有有限多个零点), 其它所有解满足(1.3).

§2 引 理

引理1 假设 $f(z)$ 为超越整函数, $\sigma(f)=\alpha<\infty$, 则存在对数测度为无穷的集合 $E_1\subset(1,+\infty)$, 满足

$$\lim_{\substack{r\to\infty\\ r\in E_1}}\frac{\log\log M(r,f)}{\log r}=\lim_{\substack{r\to\infty\\ r\in E_1}}\frac{\log \nu_f(r)}{\log r}=\alpha, \tag{2.1}$$

其中 $\nu_f(r)$ 为 $f(z)$ 的中心指标.

证明 由 $\sigma(f)=\alpha<\infty$, 所以存在 $\{r_n\}$ $(r_n\to+\infty)$, 满足

$$\lim_{r_n\to\infty}\frac{\log\log M(r_n,f)}{\log r_n}=\alpha. \tag{2.2}$$

令: $E_1\subset(1,+\infty)$, E_1 满足: E_1 包含了所有使(2.2)式成立的 $\{r_n\}$ 中的点, 并且对任意 $\{r_n\}\subset E_1$, $r_n\to\infty$ 时, 都有(2.2)式成立. 那么容易证明 E_1 的对数测度 $lm E_1=\infty$.

由 f 为有限级及[6]的定理1.12, 可知

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log M(r,f)}{\log\mu(r)}=1, \tag{2.3}$$

其中 $\mu(r)$ 为整函数 f 的最大项[6], $\mu(r)=|a_{\nu_f(r)}|\cdot r^{\nu_f(r)}$. 由(2.3)可知当 r 充分大时

$$\log M(r,f)\leq 2\log\mu(r)\leq 2\log^+|a_{\nu_f(r)}|+2\nu_f(r)\cdot\log r.$$

由 E_1 的定义可得

$$\lim_{\substack{r\to\infty\\ r\in E_1}}\frac{\log\nu_f(r)}{\log r}=\alpha.$$

引理2 假设 $a_{k-j}(j=1,\cdots,k)$ 和 F 如定理1所设, $f(z)$ 为微分方程(1.2)的解, 且 $\sigma(F)=\beta<\sigma(f)<\infty$, 那么 $\sigma(f)=(n_{k-s}+s)/s$.

证明 假设给定任意小的 ϵ $(0<2\epsilon<\sigma(f)-\beta)$, 那么当 r 充分大时有

$$|F(z)|<\exp\{r^{\beta+\epsilon}\}. \tag{2.4}$$

另一方面, 由引理1可知存在对数测度为无穷的集合 $E_1\subset(1,+\infty)$, 满足(2.1)式. 从而当 $r\in E_1$, 且 $r\to\infty$ 时 $M(r,f)>\exp\{r^{\sigma(f)-\epsilon}\}$, 及

$$\frac{|F(z)|}{M(r,f)}<\exp\{r^{\beta+\epsilon}-r^{\sigma(f)-\epsilon}\}\to 0. \tag{2.5}$$

由Wiman-Valiron 理论[6,8,9], 取 $|z|=r$ 满足 $|f(z)|=M(r,f)$, 最多除去一个对数测度为有穷的 r 集合 $E_2\subset(1,+\infty)$, 有

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}=\left(\frac{\nu_f(r)}{z}\right)^j(1+o(1))\quad(j=1,\cdots,k). \tag{2.6}$$

假设 $a_{k-j}=A_{k-j}z^{n_{k-j}}(1+o(1))$ (A_{k-j}为非零常数, $j=1,\cdots,k$), 将它们代入(1.2), 由(2.5), (2.6), 当取 $|z|=r\in E_1-E_2$, 满足 $|f(z)|=M(r,f)$, $r\to\infty$时, 可以得到

$$\left(\frac{\nu_f(r)}{z}\right)^k(1+o(1))+A_{k-1}\cdot z^{n_{k-1}}\left(\frac{\nu_f(r)}{z}\right)^{k-1}(1+o(1))+\cdots$$
$$+A_{k-s}\cdot z^{n_{k-s}}\left(\frac{\nu_f(r)}{z}\right)^{k-s}(1+o(1))+\cdots+A_0\cdot z^{n_0}(1+o(1))=o(1). \tag{2.7}$$

由于代数方程解是系数的连续函数, 所以当 $r\in E_1-E_2$, $r\to\infty$时, 可知存在常数 $c_1\neq0$及有理数 α满足

$$\nu_f(r)\sim c_1r^{\alpha}. \tag{2.8}$$

由(2.1)与(2.8)可知 $\sigma(f)=\alpha$, 且 $\alpha\leq(n_{k-s}+s)/s$. 如果 $\alpha<(n_{k-s}+s)/s$, 则(2.7)式中仅有一项 $A_{k-s}\cdot z^{n_{k-s}}\left(\frac{\nu_f(r)}{z}\right)^{k-s}(1+o(1))$的次数为最高, 矛盾. 所以 $\sigma(f)=(n_{k-s}+s)/s$.

引理3 假设 $a_0,\cdots,a_{k-1}$如定理1所设, 则方程

$$f^{(k)}+a_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+a_{k-s}f^{(k-s)}+\cdots+a_0f=0 \tag{2.9}$$

的非零解 f 或者为次数小于 $k-s$ 的多项式, 或者为超越整函数且满足 $\sigma(f)=(n_{k-s}+s)/s$, 并且这种超越整函数解, 当 $n_{k-s}\geq1$时一定存在.

进一步, 如果还满足①$k-s=0$; 或者②$k-s=1$, $a_0\not\equiv0$; 或者③$k-s\geq2$, $a_0\not\equiv0$, $a_0,\cdots,a_{k-s-1}$的次数满足: $n_{k-t}-(k-t)$ $(t=(s+1),\cdots,k)$互不相等, 那么方程(2.9)的所有非零解 f 满足 $\sigma(f)=(n_{k-s}+s)/s$.

利用[3], 使用类似引理2的证法可证明.

引理4 假设 b_{k-j} $(j=1,\cdots,k)$为多项式, $\deg b_{k-j}=n_{k-j}\leq j(\beta-1)$ $(j=1,\cdots,k-1)$, $\deg b_0=n_0=k(\beta-1)$, Q 为整函数, $\sigma(Q)=\lambda(Q)<\beta$, 那么微分方程

$$g^{(k)}+b_{k-1}g^{(k-1)}+\cdots+b_0g=Q \tag{2.10}$$

最多一个例外解 g_0满足 $\lambda(g_0)=\sigma(g_0)=\sigma(Q)=\lambda(Q)$, 其它所有解 g 都满足 $\overline{\lambda}(g)=\lambda(g)=\sigma(g)=\beta$.

使用类似于[2]中引理3的证法可证.

§3 定理的证明

定理1的证明 由[2,4]可知(1.2)的所有解 $f(z)$为整函数, 且满足 $\beta\leq\sigma(f)\leq(n_{k-s}+s)/s$. 而由引理2, 可知 f 满足 $\sigma(f)=\beta$, 或满足 $\sigma(f)=(n_{k-s}+s)/s$. 再由[2,4]可知: 满足 $\sigma(f)=(n_{k-s}+s)/s$ 的解一定满足(1.3)式.

当 $n_{k-s}\geq1$时, 假设$\{f_1,\cdots,f_k\}$为(1.2)所对应的齐次方程(2.9)的基础解, 由引理3, 可知至少存在一个解, 设为 f_k 满足 $\sigma(f_k)=(n_{k-s}+s)/s$. 而(1.2)的任意解 f 可以表示为

$$f=c_1f_1+\cdots+c_kf_k+f_{00}\ (c_1,\cdots,c_k\text{为任意常数}),$$

其中 f_{00} 为(1.2)的某一特解，那么或者 $\sigma(f_{00}) = (n_{k-s}+s)/s$，或者 $\sigma(f_{00}+f_k) = (n_{k-s}+s)/s$，所以(1.2)一定存在满足(1.3)式的解.

如果 f_0 与 f^* 为(1.2)的解，且 $\sigma(f_0) = \sigma(f^*) = \beta$，那么 $\sigma(f_0 - f^*) < (n_{k-s}+s)/s$，且 $f_0 - f^*$ 为(1.2)所对应的齐次方程(2.9)的解，由引理3可知 $f_0 - f^*$ 为多项式且 $\deg(f_0 - f^*) < k-s$.

进一步，如果满足①—③中任一条件时，且 f_0 与 f^* 为(1.2)的解，满足 $f_0 \neq f^*$，$\sigma(f_0) = \sigma(f^*) = \beta$，那么 $\sigma(f_0 - f^*) \leq \beta$，而 $f_0 - f^*$ 为(1.2)所对应齐次方程(2.9)的非零解，由引理3，$\sigma(f_0 - f^*) = (n_{k-s}+s)/s$，矛盾. 所以(1.2)最多一个例外解 f_0 满足 $\sigma(f_0) = \beta$，其它所有解满足(1.3).

定理2的证明　由[2,4]可知(1.2)的所有解 f 为整函数，且 $\sigma(f) = (n_{k-s}+s)/s$，当 $\lambda(F) = \sigma(F) = \beta$ 时，有 $\lambda(f) = \sigma(f)$.

下面假设 $\lambda(F) < \sigma(F)$，$F = z^m \cdot Q(z)e^{P(z)}$ (m 为非负整数，$Q(z)$ 为 F 的非零零点构成的典型乘积或多项式，$\lambda(Q) = \sigma(Q) < \beta$，$p(z)$ 为多项式且 $\deg p = (n_{k-s}+s)/s = \beta$).

令 $f(z) = g(z) \cdot e^{p(z)}$，并将它代入方程(1.2)得到

$$g^{(k)} + b_{k-1}g^{(k-1)} + \cdots + b_0 g = z^m \cdot Q(z), \tag{3.1}$$

其中 $b_{k-j}(j = 1, \cdots, k)$ 为多项式，可以算出多项式 b_{k-j} 的次数:

$$\deg b_0 = \deg\{a_{k-s}(p')^{k-s} + (p')^k\} = k(\beta - 1),$$

$$\deg(b_{k-j}) \leq j(\beta - 1) \quad (j = 1, \cdots, k-1).$$

所以由引理4，可知(3.1)的所有解 g 满足

$$\overline{\lambda}(g) = \lambda(g) = \sigma(g) = (n_{k-s}+s)/s,$$

且最多一个例外解 g_0 满足 $\lambda(g_0) = \sigma(g_0) = \sigma(Q) = \lambda(F)$. 从而方程(1.2)的所有解 f 满足(1.3)式和最多一个例外解 f_0 满足 $\lambda(f_0) = \lambda(F)$.

如果 F 仅有有限多个零点，那么由[4]可知(1.2)的例外解 f_0 也仅有有限多个零点.

§4　关于 $\lambda(f) < (n_{k-s}+s)/s$ 的例

例1　方程 $f^{(4)} + z^2 f''' + z^5 f'' + z^3 f' - z^2 f = (z^5 + z^3 + 1)e^z$ 满足定理1的条件，$\deg a_{k-s} = \deg a_2 = 5$. 它具有解 $f_c = e^z + c \cdot z$ (c 为任意常数)，$\sigma(f_c) = \beta = \sigma(F)$，当 $c = 0$ 时，f_0 仅有有限个零点，当 $c \neq 0$ 时，有 $\lambda(f_c) = 1$，而 F 仅有有限个零点. 这里，满足条件 $\lambda(f) < (n_{k-s}+s)/s$ 的解，不具有定理2中例外解的性质.

例2　方程 $f'' - 2zf' - f = 2z \cdot \cos z \cdot e^{z^2}$ 满足定理2的条件，这里 $\deg a_{k-s} = \deg a_1 = 1$，$\beta = \sigma(F) = (n_{k-s}+s)/s = 2$，$\lambda(F) < 2$. 它具有例外解 $f_0 = \sin z \cdot e^{z^2}$，满足 $\lambda(F) = \lambda(f_0)$，$\sigma(f_0) = \beta$.

例3　方程 $f'' - 2zf' - f = e^{z^2}$ 满足定理2的条件，它具有例外解 $f_0 = e^{z^2}$，f_0 与 F 都没有零点.

参 考 文 献

[1] S. Bank and I. Laine, *On the oscillation theory of $f''+Af=0$ where A is entire*, Trans. Amer. Math. Soc., 273(1982), 351-363.

[2] **陈宗煊, 高宗升, 非齐次线性微分方程解的复振荡, 数学学报**, 35: 2(1992), 196-203.

[3] G. Frank and S. Hellerstein, *On the meromorphic solutions of non-homogeneous linear differential equations with polynomial coefficients*, Proc. London Math. Soc. (3), 53(1986), 407-428.

[4] Gao Shian, *Two theorems on the complex oscillation theory of non-homogeneous linear differential equations*, J. Math. Anal. Appl., 162(1991), 391-391.

[5] W. Hayman, *Meromorphic Functions*, Clarendon Press, Oxford, 1964.

[6] **何育赞, 肖修治, 代数体函数与常微分方程, 科学出版社**, 1988.

[7] I. Laine, *A note on the complex oscillation theory of non-homogeneous linear differential equations*, Results in Math., 18(1990), 282-285.

[8] G. Valiron, *Lectures on the General Theory of Integral Functions*, Cleisea, New York, 1949.

[9] G. Valiron, *Functions Analytiques*, Presses Universitaires de France, Pairs, 1954.

[10] **杨乐, 值分布论及其新研究, 科学出版社**, 1982.

Two Results on the Complex Oscillation Theory of Differential Equations with Polynomial Coefficients

Chen Zongxuan

(Dept. of Math., Jiangxi Normal University, Nanchang, 330027)

Abstract

In this paper, we prove: if a_{k-j} $(j=1,\cdots,k)$ are polynomials, $\deg a_{k-j}=n_{k-j}$, there exists some a_{k-s} $(1\le s\le k)$ such that $n_{k-j}/j\le n_{k-s}/s$ if $1\le j<s$; and $n_{k-j}<n_{k-s}-(j-s)$ if $s<j\le k$, if $F\not\equiv 0$ is an entire function satisfying $\sigma(F)=\beta<(n_{k-s}+s)/s$, then a solution of the differential equation

$$f^{(k)}+a_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+a_0f=F$$

satisfies $\overline{\lambda}(f)=\lambda(f)=\sigma(f)=(n_{k-s}+s)/s$, or $\sigma(f)=\beta$.

Keywords non-homogeneous linear differential equation, entire function, zero-sequence, order of growth.