第17卷第1期 数学研究与评论 Vol. 17 No. 1
1997年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1997

一类新的六参数非协调四边形单元*

石东洋 陈绍春
(郑州大学数学系, 450052)

摘 要 利用分析 specht 元的技巧, 构造了一类新的非协调四边形单元, 并证明由此产生的有限元对任意四边形网格收敛且效果同 Wilson 元. QP6元是其中的特例.

关键词 非协调, 四边形, 收敛
分类号 AMS(1991) 65N30/CCL O242.21

1 非协调四边形单元的构造及收敛性

设 $\hat{K}, K$ 分别为参考单元及任意四边形单元, 顶点为 $\hat{A}_i$ 及 $A(x_i, y_i)$, $i=1,2,3,4$. $x_{ij}=x_i-x_j, y_{ij}=y_i-y_j$, Δ_K 为 K 的面积. $\hat{K}\to K$ 的等参变换为

$$F: x=\sum_{i=1}^{4} x_i N_i(\zeta,\eta),\quad y=\sum_{i=1}^{4} y_i N_i(\zeta,\eta),$$

$$N_i(\zeta,\eta)=\frac{1}{4}(1+\zeta_i\zeta)(1+\eta_i\eta),\quad i=1,2,3,4,$$

$$\xi_i=\{-1,1,1,-1\}^T,\quad \eta_i=\{-1,-1,1,1\}^T.$$

定义集合 Φ 及函数 N_i, $i=5,6,7,8$, 如下:

$$\Phi=\{\varphi\in C_0^1[-1,1]\cap C^2[-1,1],\ \varphi(-t)=\varphi(t),\ \int_{-1}^{1}\varphi(t)\,dt\neq 0,\ \varphi'(1)\neq 0\},$$

$$N_5=(1-\eta)\varphi(\zeta),\ N_6=(1+\zeta)\varphi(\eta),\ N_7=(1+\eta)\varphi(\zeta),\ N_8=(1-\zeta)\varphi(\eta),\ \varphi\in\Phi.$$

记 $N=(N_5,N_6,N_7,N_8)^T$, $\alpha^i=(\alpha_5^i,\alpha_6^i,\alpha_7^i,\alpha_8^i)$, $X_h^i=\alpha^i N$ $(i=1,2)$. 现构造 K 上的函数空间 $P(K)$: $v_h\in P(K)$, 设 $v_h=w_h+z_h=\sum_{i=1}^{4} v_h(A_i)N_i(\zeta,\eta)+\sum_{i=1}^{2}\lambda_i X_h^i$.

(Ⅰ) 先确定系数 α^1, α^2. 为此, 省去上标. 记 $X_h=\alpha N$, 让 X_h 通过分片检查:

$$\int_{\partial K} X_h n_x\,ds=\int_{\partial K} X_h n_y\,ds=0, \tag{1}$$

经过复杂运算及利用 Φ 上元素的性质有

$$\begin{bmatrix} y_{12} & y_{23} & y_{34} & y_{41}\\ x_{12} & x_{23} & x_{34} & x_{41}\end{bmatrix}\alpha^T=0. \tag{2}$$

此式与[1]中的(1.5)式一样, 从而可得到两个解 α^1, α^2. 如取

$$\alpha^1=(y_{23}x_{34}-y_{34}x_{23},\ y_{34}x_{12}-y_{12}x_{34},\ y_{12}x_{23}-y_{23}x_{12},\ 0),$$

* 1994年3月28日收到. 1996年5月28日收到修改稿. 国家自然科学基金及河南省自然科学基金资助项目.

$$\alpha^2=(\Delta_K,\Delta_K,\Delta_K,\Delta_K).$$

(Ⅱ) **确定** λ_1,λ_2 **与** v_h **的关系**

引理1 **当** K **为凸四边形时,** λ_1,λ_2**可由下式:**

$$\iint_{\hat{K}}(\hat{v}_h)_{\xi\xi}\,d\xi\,d\eta=4\varphi'(1)\left(\lambda_1(1,0,1,0)(\alpha^1)^T+\lambda_2(1,0,1,0)(\alpha^2)^T\right)$$

$$\iint_{\hat{K}}(\hat{v}_h)_{\eta\eta}\,d\xi\,d\eta=4\varphi'(1)\left(\lambda_1(0,1,0,1)(\alpha^1)^T+\lambda_2(0,1,0,1)(\alpha^2)^T\right)$$

唯一确定. 且 $|\lambda_i|\le Ch^{-2}|\hat{v}_h|_{2,\hat{K}},\ h=\max h_K,\ h_K=\mathrm{diam}(K).$

证明 **证明类同**[1].

引理2 $|z_h|_{1,h}\le C|v_h|_{1,h},\quad |z_h|_0\le Ch|v_h|_{1,h}.$

证明 **在参考元** $\hat{K}$ **上, 记** $\hat{v}=\hat{w}+\hat{z}$**, 那么利用** Φ **的性质经过推导得:**

$$|\hat{z}|_{1,\hat{K}}\le|\hat{v}|_{1,\hat{K}},$$
$$|\hat{z}|^2_{0,\hat{K}}\le C|\hat{z}|_{1,\hat{K}}\le C|\hat{v}|_{1,\hat{K}},$$
$$|z_h|_{1,K}\le C|\hat{z}_h|_{1,\hat{K}}\le C|\hat{v}_h|_{1,\hat{K}}\le C|v_h|_{1,K},$$
$$|z_h|_{0,K}\le Ch|\hat{z}_h|_{0,\hat{K}}\le Ch|\hat{v}_h|_{1,\hat{K}}\le Ch|v_h|_{1,K},$$

对所有单元求和即可得证引理

(Ⅲ) **主要结果是:**

定理1 **上述构造的单元通过广义分片检查; 设** $u\in H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega)$, u_h **分别为二阶问题的精确解和有限元解, 那么有**

$$\|u-u_h\|_0+h\|u-u_h\|_{1,h}\le Ch^2\|u\|_{2,\Omega}.$$

证明 **类同**[1]**中定理1的讨论, 可以证明上述单元通过广义分片检查. 再利用**[3]**中定理的证明即可得到误差估计, 只用到了引理1, 引理2及(1)式**

2 讨论

1) **取** $\varphi(t)=\frac{1}{2}(t^2-1)$, **则** $\varphi\in\Phi$, **易知此元即为QP6元**

2) **利用** Φ **中任一元素可构造一新的四边形单元. 如可取** $\varphi(t)=1-t^4,\ \varphi(t)=\frac{1}{2}(1-t^2-t^4)$, **等等**

3) Φ **中不仅包含多项式, 如可取** $\varphi(t)=\cos\frac{\pi}{2}t,\ \varphi(t)=1-t^2-\cos\frac{m\pi}{2}t$ (m **为奇数), 等等**

综合上述, 只要非协调部分的 $\varphi\in\Phi$, **那么构造的单元对任意四边形网格均收敛且理论效果同Wilson元, 从而克服了Wilson元只对矩形或平行四边形网格收敛的缺陷**

注1 **这样构造的四边形单元其形状函数依赖于单元本身. 关于形函数不依赖于单元的情况及更广泛的一类乘积型非协调四边形单元的构造可参见**[3].

注2 **本文结论很容易推广到三维区域**

参 考 文 献

[1] 蔡 伟, 二个非协调膜元的收敛性, 计算数学, 8: 1(1986), 63—74.

[2] 石钟慈, 陈绍春, Specht 九参数板元的分析, 计算数学, 11: 3(1989), 312- 318.

[3] 石东洋, 陈绍春, 一类非协调凸四边形单元, 高校应用数学学报, 待发.

[4] P. G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978.

A Class of New 6-Parameter Nonconforming Arbitrary Quadrilateral Elements

Shi Dongyang *Chen Shaochun*

(Zhengzhou University, 450052)

Abstract

Using the analysis techniques of specht elements, a class of new nonconforming quadrilateral elements is presented. It is proved that these elements have the similar convergence behavior to that of Wilson element. QP6 element is special of our elements.

Keywords nonconforming, quadrilateral, convergence.