第17卷第1期 数学研究与评论 Vol. 17 No. 1
1997年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1997

体上右线性方程组的反问题*

王卿文
(山东昌潍师专数学系，潍坊261043)

林春艳
(山东财政学院基础部，济南250014)

摘　要　设 F, K, Ω 分别表示一个任意的体、一个具有对合反自同构的体和一个实四元数体，F^n 表示 F 上的 n 维右向量空间. 本文推广和改进了实线性方程组的反问题及一系列结果，解决了 F 上右线性方程组更具一般性的反问题(简称 IPS)：给定 $b\in F^s$ 和 $\alpha_i\in F^n\ (i=1,\cdots,m\leq n)$ 满足 $\mathrm{rank}[\alpha_1,\cdots,\alpha_m]=m$，求所有的 $s\times n$ 矩阵 A 使 $A\alpha_i=b\ (i=1,\cdots,m)$. 当 $s=n$ 时，分别给出了 IPS 在 K 上有(反)自共轭解及在 Ω 上有亚(半)正定解的充要条件及其解的表达式.

关键词　体，实四元数体，线性方程组反问题，(反)自共轭矩阵，亚(半)正定矩阵.
分类号　AMS(1991) 15A24/CCL O151.21

1　引　　言

本文约定，F, K 和 Ω 分别表示一个任意的体、一个具有对合反自同构的体和一个实四元数体，F^n 表示 F 上的 n 维右向量空间，$F^{m\times n}$ 和 $F_r^{m\times n}$ 分别表示 F 上的全体 $m\times n$ 矩阵和 F 上的全体秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵，$\mathrm{rank}A$ 表示矩阵 A 的秩，A^* 表示 A 的共轭转置，$GL_n(F)$ 表示 F 上的全体 $n\times n$ 可逆阵，$SC_n(K)$ 与 $SS_n(K)$ 分别表示 K 上的全体 $n\times n$ 自共轭矩阵 $(A^*=A)$ 和 K 上的全体 $n\times n$ 反自共轭矩阵 $(A^*=-A)$，$SP_n(P_n)$ 表示 Q 上的全体 $n\times n$ 半正定(正定)自共轭矩阵，I_i 表示 i 阶单位阵，$T_{ij}(k)$ 表示将矩阵的第 j 行左乘以 k 加到第 i 行，$P^{-*}=(P^{-1})^*=(P^*)^{-1}$，$\mathrm{Re}[b]$ 表示实四元数 b 的实部.

[1]提出了实线性方程组的反问题，即给定 n 维列向量 β, γ，求某一类型的 $n\times n$ 实矩阵 A，使 $A\beta=\gamma$. 文[1-7]分别给出了此反问题的正定对称矩阵解与对称矩阵解的某些解法与解集结构. 本文推广和改进了以上结果，解决了 F 上线性方程组更具一般性的反问题(简称 IPS)：给定 $b\in F^s$ 和 $\alpha_i\in F^n\ (i=1,\cdots,m\leq n)$，满足

$$\mathrm{rank}[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m]=m,$$

求所有的矩阵 $A\in F^{s\times n}$ 使 $A\alpha_i=b\ (i=1,\cdots,m)$. 证明了 IPS 一定可解，给出了求 IPS 的一般解的实用方法，导出了 IPS 当 $s=n$ 时在 K 上有(反)自共轭解及在 Q 上有亚(半)正定解的充要条件及其解集结构.

本文恒令 $B=[\alpha_2-\alpha_1,\cdots,\alpha_m-\alpha_1]$.

解 IPS 等价于解下面的矩阵方程组

* 1994年5月7日收到. 1996年6月28日收到修改稿. 山东自然科学基金资助课题.

$$\begin{cases} AB = 0, \\ A\alpha_1 = b, \end{cases} \tag{1}$$

其中$A \in F^{s\times n}$为未知矩阵.

2　IPS 的一般解

定义1　设$X \in F^{s\times n}, A \in F_r^{n\times t}, C \in F^{s\times t}$, 称

$$XA = 0, \tag{2}$$

为$XA = C$的导出方程.

若$\{\beta_1, \cdots, \beta_{n-r}\}$是方程组$X_{1n}A_{nt} = 0$的解向量左空间的一个基, 则称$N = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-r} \end{bmatrix}$为(2)的一个基础解阵.

定理1　矩阵方程组(1)必有解, 且

$$C = \left[\begin{array}{cc|c} B & \alpha_1 & I_n \\ \hline 0 & -b & 0 \end{array}\right],$$

总可经过一系列初等变换($T_{ij}(k)$当$i > n$时, $j < i$; 初等列变换仅对前m列施行)化为如下形式

$$G = \begin{bmatrix} D_{mm} & M_{mn} \\ O_{(n-m)n} & N_{(n-m)n} \\ O_{sm} & U_{sn} \end{bmatrix},$$

其中U_{sn}为(1)的一个特解, $N_{(n-m)n}$为(1)的导出方程的一个基础解阵.

证明　先证(1)有解. 由$\mathrm{rank}[\alpha_1, \cdots, \alpha_m] = m$可得$\mathrm{rank}[B, \alpha_1] = m$. 又

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} B & \alpha_1 \\ 0 & b \end{bmatrix} \geq \max\{\mathrm{rank}[B, \alpha_1], \mathrm{rank}[0, b]\} = \mathrm{rank}[B, \alpha_1] = m,$$

故由$\begin{bmatrix} B & \alpha_1 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in F^{(n+s)\times m}$, 即得

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} B & \alpha_1 \\ 0 & b \end{bmatrix} = m = \mathrm{rank}[B, \alpha_1].$$

由[8, 引理1. 3]即知(1)有解.

因$\mathrm{rank}[B, \alpha_1] = m$, 故有$P_1 \in GL_n(F)$和$Q_1 \in GL_m(F)$使

$$P_1[B, \alpha_1]Q_1 = \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix},$$

其中$D \in GL_m(F)$. 令

$$P_1 = \begin{bmatrix} M_{mn} \\ N_{(n-m)n} \end{bmatrix},$$

则

$$N_{(n-m)n}[B, \alpha_1]Q_1 = 0.$$

由Q_1可逆知, $N[B, \alpha_1] = 0$. 而P_1可逆, 故$\mathrm{rank}N = n - m$. 从而N为(1)的导出方程的一个基础解阵. 设U_{sn}为(1)的一个解, 则

$$U_{sn}[B, \alpha_1]Q_1 + [0, -b]Q_1 = O_{sm}.$$

令 $P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ U_{sn} & I_s \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$, 则 $P \in GL_{n+s}(F)$, $Q \in GL_{n+m}(F)$. 于是, 可检验知

$$PCQ = \begin{bmatrix} D_{mm} & M_{mn} \\ 0 & N_{(n-m)n} \\ 0 & U_{sn} \end{bmatrix} = G.$$

由 P 的结构特点及体上矩阵初等变换与初等阵及可逆阵的关系[9]即知, C 可经过一系列初等变换($T_{ij}(k)$ 当 $i > n$ 时, $j < i$; 初等列变换仅对前 m 列施行) 化为 G 的形式

反之, 若 C 经过上述初等变换化为 G 的形式, 即有可逆阵 Q 和可逆阵 $P = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ C_2 & I_s \end{bmatrix}$, 使

$$P\begin{bmatrix} B & \alpha_1 \\ 0 & -b \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} D \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

此时, $P\begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ N \\ U \end{bmatrix}$. 从而有

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ N \\ U \end{bmatrix}.$$

将上式代入(3)式立得

$$N[B, \alpha_1]Q = 0, \quad U[B, \alpha_1]Q + [0, -b]Q = 0.$$

由于 Q 可逆, 故 U 为(1)的一个特解, N 为(1)的导出方程的解 由于 P 可逆, 故 $\mathrm{rank}N = n - m$. 所以, N 为(1)的导出方程的一个基础解阵 □

定理2 设 U 为 IPS 的一个特解, N 为(1)的导出方程的一个基础解阵, 则 IPS 的解集为

$$\{U + DN \mid D \in F^{s\times(n-m)}\}. \tag{4}$$

证明 易验证对任意的 $D \in F^{s\times(n-m)}$, $U + DN$ 为(1)的解, 从而为 IPS 的解

反之, 设 X 为 IPS 的任一解, 则 $X - U$ 为(1)的导出方程的解, 故 $X - U = DN$, 其中 $D \in F^{s\times(n-m)}$, N 为(1)的导出方程的一个基础解阵 于是, $X = U + DN$. □

推论1 对于 IPS,

(i) $m = n$ 时, 有唯一解;

(ii) $m < n$ 时, 有无穷多解

综上, 解 IPS 的具体步骤为:

(i) 令 $B = [\alpha_2 - \alpha_1, \cdots, \alpha_n - \alpha_1]$,

$$C = \left[\begin{array}{cc|c} B & \alpha_1 & I_n \\ \hline 0 & -b & 0 \end{array}\right],$$

对 C 作一系列初等变换($T_{ij}(k)$ 当 $i > n$ 时, $j < i$; 初等列变换仅对前 m 列施行) 化为 G 的形式, 则 G 中的 U 和 N 分别为(1)的一个特解和导出方程的一个基础解阵

(ii) 由(4)式写出 IPS 的通解

3 IPS 的(反)自共轭解与亚(半)正定解

以下令 $s=n, F=K$.

由于 $\mathrm{rank}[B, \alpha_1]=m$, 故有 $P\in GL_n(K)$ 使

$$P[B, \alpha_1]=\begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

以下恒令

$$P^{-*}[0, b]=\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

其中 $C_1\in K^{m\times m}$, 则

$$C_1=[B, \alpha_1]^*[0, b]. \tag{7}$$

引理1 IPS 的一般解集为

$$\left\{P^*\begin{bmatrix} C_1 & X_{12} \\ C_2 & X_{22} \end{bmatrix}P \,\middle|\, X_{12}\in K^{m\times(n-m)}, X_{22}\in K^{(n-m)\times(n-m)}\right\}. \tag{8}$$

证明 设

$$P^{-*}AP^{-1}=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} m \\ n-m \end{array} \\ \begin{array}{cc} m & n-m \end{array} & \end{array},$$

则 IPS 等价于 $P^{-*}AP^{-1}P[B, \alpha_1]=P^{-*}[0, b]$, 其中 $A\in K^{n\times n}$未知. 由(5)及(6)知,

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

从而, $X_{11}=C_1, X_{21}=C_2$. 故 A 可表成(8)的形式.

反之, 由(5)及(6)易验知, 具有(8)形式的矩阵一定为 IPS 的解. □

定理3 IPS 有自共轭解的充要条件是 $\alpha_1^*b=b^*\alpha_1$ 且 $B^*b=0$. 有此种解时, 其解集为

$$\left\{P^*\begin{bmatrix} C_1 & C_2^* \\ C_2 & X_{22} \end{bmatrix}P \,\middle|\, X_{22}\in SC_{n-m}(K)\right\}. \tag{9}$$

证明 易知 $C_1^*=C_1\Leftrightarrow\alpha_1^*b=b^*\alpha_1$ 且 $B^*b=0$.

若 $C_1^*=C_1$, 则具有(9)形式的矩阵必为自共轭阵. 易验知, 具有(9)形式的矩阵必为(1)的解, 从而为 IPS 的解.

反之, 设 $A\in SC_n(K)$ 是 IPS 的任一解, 则由引理1知, A 可表成(8)的形式, 即

$$A=P^*\begin{bmatrix} C_1 & X_{12} \\ C_2 & X_{22} \end{bmatrix}P\in SC_n(K).$$

从而, $C_1^*=C_1, X_{12}=C_2^*, X_{22}\in SC_{n-m}(K)$. 即 A 可表成(9)的形式. □

仿上可得 IPS 关于反自共轭解的结论.

定理4 IPS 有反自共轭解的充要条件是 $\alpha_1^*b=-b^*\alpha_1$ 且 $B^*b=0$. 有此种解时, 其解集为

$$\left\{P^*\begin{bmatrix} C_1 & -C_2^* \\ C_2 & D \end{bmatrix}P \,\middle|\, D\in SS_{n-m}(K)\right\}.$$

以下恒令 $K=\Omega$. 下面考虑 IPS 的亚(半)正定解.

定义2 设$A\in\Omega^{n\times n}$，若对任意的$0\neq x\in\Omega^{n}$，有$\mathrm{Re}[x^{*}Ax]\geq0(>0)$，则称$A$为$n$阶亚半正定(亚正定)的．

用$SP_{n}^{*}(P_{n}^{*})$表示全体n阶亚半正定(亚正定)矩阵．

任意的$A\in\Omega^{n\times n}$可唯一地表为

$$A=H(A)+S(A),$$

其中，$H(A)=\frac{1}{2}(A+A^{*})\in SC_{n}(\Omega)$，$S(A)=\frac{1}{2}(A-A^{*})\in SS_{n}(\Omega)$．易证得下面的

引理2 (i) $A\in SP_{n}^{*}\Leftrightarrow H(A)\in SP_{n}$； (ii) $A\in SP_{n}^{*}\Leftrightarrow P^{*}AP\in SP_{n}^{*}\ (P\in GL_{n}(\Omega))$；(iii) $A\in SP_{n}^{*}$，$P\in\Omega^{n\times m}$，则$P^{*}AP\in SP_{m}^{*}$．

引理3[10] 设$A=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}\in\Omega^{n\times n}$，其中$A_{ii}\in\Omega^{n_i\times n_i}(n_1+n_2=n)$，则$A\in SP_{n}^{*}$的充要条件是$\mathrm{rank}[A_{11}+A_{11}^{*}]=\mathrm{rank}[A_{11}+A_{11}^{*},A_{12}+A_{21}^{*}]$且$A_{11}$与$A_{22}-U^{*}A_{11}U$是亚半正定的，其中$U$是矩阵方程$(A_{11}+A_{11}^{*})X=A_{12}+A_{21}^{*}$关于$X$的解．

定理5 IPS有亚正定解的充要条件是$B^{*}b=0$且$\alpha_1^{*}b$为亚半正定的．有此种解时，其解集为

$$\left\{P^{*}\begin{bmatrix}C_1&-C_2^{*}+(C_1+C_1^{*})U\\C_2&D+U^{*}C_1U\end{bmatrix}P\ \middle|\ D\in SP_{n-m}^{*},U\in\Omega^{(n-m)\times m}\right\}.\tag{10}$$

证明 设$A\in SP_{n}^{*}$为IPS的解，则

$$A[B,\alpha_1]=[0,b],$$

且由引理2知，$[B,\alpha_1]^{*}[0,b]=[B,\alpha_1]^{*}A[B,\alpha_1]\in SP_{m}^{*}$．即

$$\begin{bmatrix}0&B^{*}b\\0&\alpha_1^{*}b\end{bmatrix}\in SP_{m}^{*}.$$

由引理3知，$B^{*}b=0$且$\alpha_1^{*}b$为亚半正定的．由引理1知，A具有(8)的形式．由引理2，

$$\begin{bmatrix}C_1&X_{12}\\C_2&X_{22}\end{bmatrix}\in SP_{n}^{*}.$$

由引理3，矩阵方程$(C_1+C_1^{*})X=X_{12}+C_2^{*}$关于$X$有解，且$C_1$与$X_{22}-U^{*}C_1U\overset{\triangle}{=}D$均为亚半正定阵，其中$U$为上述矩阵方程的任一解．从而，

$$X_{12}=-C_2^{*}+(C_1+C_1^{*})U,X_{22}=D+U^{*}C_1U.$$

故A可表成(10)的形式．

反之，若$B^{*}b=0$，$\alpha_1^{*}b$亚半正定，则$[B,\alpha_1]^{*}[0,b]\in SP_{m}^{*}$．从而由(7)式知，$C_1\in SP_{m}^{*}$．由引理3及引理2知，具有(10)形式的矩阵必为亚半正定阵．易验知，具有(10)形式的A必为IPS的解． □

易知，IPS有亚正定解的必要条件为$B=0$，$b\neq0$．此时解IPS相当于解未知阵为A的矩阵方程$A\alpha_1=b$．对于α_1，有$P\in GL_{n}(\Omega)$，使

$$P\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$$

令 $P^{-*}b=\begin{bmatrix} c \\ C_2 \end{bmatrix}$，则 $c=\alpha_1^* b$. 仿定理5立得

定理6 IPS 有亚正定解当且仅当 $B=0$，且 $\alpha_1^* b$ 为亚正定. 有此种解时，其解集为

$$\left\{ P^* \begin{bmatrix} c & -C_2^* + 2\mathrm{Re}[c]U \\ C_2 & D+U^* cU \end{bmatrix} P \,\middle|\, D \in P_{n-1}^*, U \in \Omega^{n-1} \right\}.$$

参 考 文 献

[1] 李森林，几类直接控制系统绝对稳定的充要条件，科学通报，10(1982)，581—582.

[2] 李绍疆，若干矩阵反问题，中国科学技术大学学报，2(1984)，195—204.

[3] 张磊等，关于线性代数方程 $Ax=b$ 的一类反问题，数学的实践与认识，1(1984)，21—26.

[4] 郭 忠，矩阵正定性判定及线性方程组 $Ax=b$ 的反问题求解，科学通报，2(1987)，95—98.

[5] 朱尔园，线性代数方程组反问题的对称矩阵解，华侨大学学报，2(1990)，127—134.

[6] 郑慧娆，计算正定方程组反问题特解的正交相似法，数学杂志，2(1989)，209—216.

[7] L. J. Sheng, *A note on the positive definite real matrices*, Appl. Math. J. of Chinese Univ., 3(1988), 346-353.

[8] Wang Qingwen, *On a system of matrix equations over an arbitrary skew field*, Chinese Qua. J. of Math., 1(1994), 65-70.

[9] T. W. Hungerford, *Algebra*, Spring-Verlag, New York Inc., 1980.

[10] Wang Qingwen, *Metapositive semidefinite solutions to the matrix equation AXB = C over a strong p-division ring*, Northeast. Math. J., 12: 2(1996), 197-206.

[11] 王卿文，任意体上的矩阵分解与矩阵方程，数学学报，39: 3(1996)，396-403.

An Inverse Problem of a System of Right Linear Equations over Skew Fields

Wang Qingwen

(Dept. of Math., Changwei Teachers College, Weifang 261043)

Lin Chunyan

(Dept. of Basic Sciences, Shandong Finance College, Jinan 250014)

Abstract

In this paper, we generalize and improve the inverse problem of a system of linear real equations, solve the more general inverse of a system of linear right equations over skew fields. Necessary and sufficient conditions for the existence of and the expressions for (skew) self-conjugate solutions and metapositive (semi) definite solutions of the present problem are obtained.

Keywords skew field, the real quaternion field, inverse problem of linear equations, (skew) self-conjugate matrix, metapositive (semi) definite matrix.