第17卷第1期　　　　数学研究与评论　　　　Vol. 17 No. 1
1997年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 1997

关于整函数在复合意义之下的因子分解*

李 玉 华
(云南师范大学数学系，昆明650092)

关键词　整函数，因子分解
分类号　AMS(1991) 30D20/CCL O174.52

如存在亚纯函数 f 与 g，使亚纯函数 $F=f\circ g$，则称 F 具有左因子 f 和右因子 g，$f\circ g$ 为 F 的一个分解. 如在 F 的任意分解中，当其左(右)因子不是分式线性变换时，其右(左)因子必为分式线性变换，则称 F 为右(左)素的. 如 F 既为左素，又为右素，则称 F 为素的.

1977年H. Urabe 与C. C. Yang[1]证明了:

定理A　设 $c_j\ (1\le j\le m)$ 与 $\alpha_j\ (1\le j\le m)$ 为两组非零有穷复数，$m\ge 2$. 若

(i)　当 $m=2$ 时，$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\bar{\in} \mathbf{R}$，当 $m\ge 3$ 时，对任意判别的 $j,k,l\ (1\le j,k,l\le m)$ 都有 $\frac{\alpha_j}{\alpha_k}\bar{\in} \mathbf{R}$，$\frac{\alpha_j-\alpha_l}{\alpha_k-\alpha_l}\bar{\in} \mathbf{R}$；

(ii)　$\exists\ \theta_0\in[0,2\pi)$，使 $\alpha_j\in\{z:\mathrm{Re}(e^{i\theta}z)\ge 0\}\ (j=1,2,\cdots,m)$.

则 $F(z)=\sum_{j=1}^{m}c_je^{\alpha_jz}$ 及其各阶导数均为素的.

本文将定理A 改进为:

定理1　设 $c_j(z)\ (j=1,\cdots,m+1)$ 为一组多项式，前 $m\ (\ge 2)$ 个均不蜕化为零，$\alpha_j\ (j=1,\cdots,m)$ 为一组复数，满足定理A 中条件(i)及(ii)，置 $F(z)=\sum_{j=1}^{m}c_j(z)e^{\alpha_jz}+c_{m+1}(z)$，则 $F^{(n)}(z)\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 都为素的.

推论　若 $p(z)$ 是次数为奇数的多项式，γ 及 b 为复常数，则 $\cos z e^{\gamma z+b}+p(z)$ 是素的.

以上推论说明[2]中的一个预测是正确的.

为了证明这个定理，应用与[1]中类似的方法，我们建立了下述两个引理:

引理1　设 $Q_1(z)$ 与 $Q_2(z)$ 为不蜕化为零的有理函数，α,β,a 及 b 为非零有穷复数，$\{z_n\}$ 为无界数列，若 $\lim_{n\to\infty}Q_1(z_n)e^{\alpha z_n}=a$，$\lim_{n\to\infty}Q_2(z_n)e^{\beta z_n}=b$，则 $\frac{\beta}{\alpha}\in\mathbf{R}$.

引理2　设 $c_j(z)\ (j=1,\cdots,m+1)$ 如定理1所述，$\alpha_j\ (j=1,\cdots,m)$ 为 m 个判别有穷复数，$F(z)=\sum_{j=1}^{m}c_j(z)e^{\alpha_jz}+c_{m+1}(z)\ (m\ge 2)$，则以下两种情况至少有一种发生:

(1)　对 $\forall a\in C$，方程组 $F(z)=a$ 与 $F'(z)=0$ 均至多只有有穷个解;

* 1994年2月6日收到

(2) 存在判别的 $j, k, l\,(1\leq j, k, l\leq m)$ 使 $\frac{\alpha_j}{\alpha_k}\in\mathbf{R}$ 或者 $\frac{\alpha_j-\alpha_l}{\alpha_k-\alpha_l}\in\mathbf{R}$

利用引理2, 与定理A 的证明类似, 即可证明定理1.

在本文中, 还得到如下结果:

定理2 $f(z)=\cos\sqrt{z}\,e^{\cos\sqrt{z}+z}$ 与 $g(z)=\cos\sqrt{z}\,e^{\cos\sqrt{z}-z}$ 都是素的.

要证定理2, 主要依据以下几条引理:

引理3[3] 设 $f(z)$ 为整函数, 若无界数列 $\{a_n\}$ 使 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{z: f(z)=a_n\}$ 位于一条直线上, 则 $f(z)$ 只能为多项式且其次数不超过2.

引理4[4] 设 F 为非周期整函数, 则 F 为素的当且仅当 F 为 E-素(这里 E-素是指将因子限制在整函数范围内时, 函数为素的).

由零分布状况不难看出, 定理2中的 f, g 及 fg 均为非周期的. f 与 g 为素的, 但 fg 不为素的, 从而也说明[5]中一个预测的回答为否定的.

参 考 文 献

[1] H. Urade, C. C. Yang, Kôdai Math., 29(1977), 167-178.

[2] F. Gross, C. C. Yang, Tran. Amer. Math. Soc., 192(1974), 347-355.

[3] A. Edrei, Tran. Amer. Math. Soc., 78(1955), 276-293.

[4] F. Gross, Indian J. Pure and Appl. Math., 2(1971), 561-571.

[5] C. C. Yang, 宋国栋, 何育赞, 数学进展, 20(1991), 142-151.