第 17 卷第 2 期　　数学研究与评论　　Vol. 17 No. 2
1997 年 5 月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 1997

关于 T. J. Rivlin 的一个问题*

吴嘎日迪　　　　陈广荣
(内蒙古师范大学数学系, 呼和浩特 010022)　　(河北机电学院基础部, 石家庄 050054)

摘　要　本文在连续函数空间内按两种范数 $\|\cdot\|_M$ (Orlicz 范数) 和 $\|\cdot\|_{(M)}$ (Luxemburg 范数分别解决了 T. J. Rivlin 的一个问题

关键词　N 函数, 多项式, 逼近, 范数
分类号　AMS(1991) 41A10, 41A50/CCL O174.41

1　引言和主要结果

1968 年, 在上沃尔法赫(Oberwolfach)举行的逼近论会议上, T. J. Rivlin 提出了下面的问题[1]:

对于一组 n 个代数多项式$\{p_0, p_1, \cdots, p_{n-1}\}$(其中 $\deg p_k = k, k=0,1,\cdots,n-1$), 如果存在函数 $f\in C[-1,1]$, 使得 f 的 k 次最佳一致逼近代数多项式是 $p_k(k=0,1,\cdots,n-1)$, 则这一组 n 个代数多项式$\{p_0,p_1,\cdots,p_{n-1}\}$具有什么特征?

很多学者研究过这一问题(如[2], [3]等). 本文在连续函数空间内关于 Orlicz 范数和 Luxemburg 范数研究这一问题. 以下均用 $M(u)$ 和 $N(v)$ 表示互余的 N 函数, L_M^* 表示由 N 函数 $M(u)$ 生成的 Orlicz 空间, $\|\cdot\|_M$ 和 $\|\cdot\|_{(M)}$ 分别表示 L_M^* 空间上的 Orlicz 范数和 Luxemburg 范数[4].

定理 1　设 $M(u)$ 是满足 Δ_2 条件的 N 函数, $M(u)$ 的右导数 $p(u)$ 连续, 对于一组 n 个代数多项式$\{p_0,p_1,\cdots,p_{n-1}\}$(其中 $\deg p_k=k, k=0,1,\cdots,n-1$), 如果存在 $f\in C[-1,1]$, 使得 f 关于范数 $\|\cdot\|_M$ 的 k 次最佳逼近代数多项式是 $p_k(k=0,1,\cdots,n-1)$ 且对某一对 $i,j(0\le i<j\le n-1)$, 如果存在 $\lambda>0$, 使得 $\int_{-1}^{1} N[p(\lambda|f(x)-p_r(x)|)]dx=1(r=i,j)$, 则 j 次多项式 $p^*=p_j-p_i$ 在$[-1,1]$上至少 i 次改变符号.

定理 2　在定理 1 的条件下, 如果存在 $f\in C[-1,1]$, 使得 f 关于范数 $\|\cdot\|_{(M)}$ 的 k 次最佳逼近代数多项式是 $p_k(k=0,1,\cdots,n-1)$ 且对某一对 $i,j(0\le i<j\le n-1)$, 如果 $\|f-p_i\|_{(M)}=\|f-p_j\|_{(M)}$, 则 j 次多项式 $p^*=p_j-p_i$ 在$[-1,1]$上至少 i 次改变符号.

下面的定理 3 说明, 在一般情况下, 该条件不是充分的.

定理 3　由 N 函数 $M(u)=\frac{1}{2}u^2$ 生成的 Orlicz 空间 L_M^* 具有下列性质: 设 p_i 和 p_j 是 i 次

* 1994 年 5 月 16 日收到 1996 年 8 月 7 日收到修改稿. 内蒙古自治区自然科学基金资助项目.

和 j 次的代数多项式($i< j$), 则存在 $f \in C[-1,1]$, 使得 f 关于范数 $\|\cdot\|_M$ (或 $\|\cdot\|_{(M)}$) 的 i 次和 j 次最佳逼近代数多项式分别是 p_i 和 p_j 当且仅当 p_j 关于范数 $\|\cdot\|_M$ (或 $\|\cdot\|_{(M)}$) 的 i 次最佳逼近代数多项式是 p_i.

2 定理的证明

定理 1 的证明 用反证法, 假设定理的条件被满足, 但 j 次多项式 $p^* = p_j - p_i$ 在 $[-1,1]$ 上至多 $i-1$ 次改变符号. 则由条件并利用[5]中的推论 1.3 知, 对于次数不超过 r 的任意多项式 $Q_r(x)$, 有

$$\int_{-1}^{1} Q_r(x) p(\lambda|f(x) - p_r(x)|) \operatorname{sgn}(f(x) - p_r(x)) dx = 0 \quad (r = i, j), \tag{1}$$

其中 $\lambda > 0$ 满足 $\int_{-1}^{1} N[p(\lambda|f(x) - p_r(x)|)] dx = 1 (r = i, j)$. 令

$$Z_+(g) = \{x \in [-1,1]: g(x) > 0\};$$
$$Z(g) = \{x \in [-1,1]: g(x) = 0\};$$
$$Z_-(g) = \{x \in [-1,1]: g(x) < 0\}.$$

则由(1)得

$$\int_{Z_+(f-p_r)} Q_r(x) p(\lambda|f(x) - p_r(x)|) dx = \int_{Z_-(f-p_r)} Q_r(x) p(\lambda|f(x) - p_r(x)|) dx \quad (r = i, j). \tag{2}$$

由假设可推出一定存在 i 次多项式 $Q(x)$, 使得对任意 $x \in [-1,1] \setminus Z(p^*)$, 有 $\operatorname{sgn} Q(x) = \operatorname{sgn} p^*(x)$. 记

$$\begin{aligned} Z_+(f-p_i) \cap Z_+(f-p_j) = &\{Z_+(f-p_i) \cap Z_+(f-p_j) \cap Z_+(p^*)\} \cup \{Z_+(f-p_i) \\ &\cap Z_+(f-p_j) \cap Z_-(p^*)\} \cup \{Z_+(f-p_i) \\ &\cap Z_+(f-p_j) \cap Z(p^*)\} \\ = &Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3. \end{aligned}$$

对于 $x \in Z_1$ (或 Z_2), 显然有

$$Q(x) P(\lambda|f(x) - p_i(x)|) \geq Q(x) p(\lambda|f(x) - p_j(x)|).$$

另外, 当 $x \in Z_3$ 时, 上式显然成为等式, 由此可见

$$\int_{Z_+(f-p_i) \cap Z_+(f-p_j)} Q(x) p(\lambda|f(x) - p_i(x)|) dx \geq \int_{Z_+(f-p_i) \cap Z_+(f-p_j)} Q(x) p(\lambda|f(x) - p_j(x)|) dx. \tag{3}$$

与上述情形类似, 容易验证

$$\int_{Z_+(f-p_i) \cap Z(f-p_j)} Q(x) p(\lambda|f(x) - p_i(x)|) dx \geq 0, \tag{4}$$

$$\int_{Z(f-p_i) \cap Z_+(f-p_j)} Q(x) p(\lambda|f(x) - p_j(x)|) dx \leq 0. \tag{5}$$

记

$$A_r = \int_{Z_+(f-p_i)\cap Z_-(f-p_j)} Q(x)p(\lambda|f(x)-p_r(x)|)dx,$$

$$B_r = -\int_{Z_-(f-p_i)\cap Z_+(f-p_j)} Q(x)p(\lambda|f(x)-p_r(x)|)dx,$$

则$A_r \geq 0, B_r \geq 0 (r = i, j)$. 另外, 由(3), (4), (5)可推出

$$\begin{aligned}
&\int_{Z_+(f-p_i)} Q(x)p(\lambda|f(x)-p_i(x)|)dx \\
&= \int_{Z_+(f-p_i)\cap Z_+(f-p_j)} Q(x)p(\lambda|f(x)-p_i(x)|)dx \\
&\quad + \int_{Z_+(f-p_i)\cap Z_-(f-p_j)} Q(x)p(\lambda|f(x)-p_i(x)|)dx \\
&\quad + \int_{Z_+(f-p_i)\cap Z(f-p_j)} Q(x)p(\lambda|f(x)-p_i(x)|)dx \\
&\geq \int_{Z_+(f-p_i)\cap Z_+(f-p_j)} Q(x)p(\lambda|f(x)-p_j(x)|)dx + A_i \\
&= \int_{Z_+(f-p_j)} Q(x)p(\lambda|f(x)-p_j(x)|)dx \\
&\quad - \int_{Z_-(f-p_i)\cap Z_+(f-p_j)} Q(x)p(\lambda|f(x)-p_j(x)|)dx \\
&\quad - \int_{Z(f-p_i)\cap Z_+(f-p_j)} Q(x)p(\lambda|f(x)-p_j(x)|)dx + A_i \\
&\geq \int_{Z_+(f-p_j)} Q(x)p(\lambda|f(x)-p_j(x)|)dx + A_i + B_j.
\end{aligned} \tag{6}$$

同理可证

$$\begin{aligned}
&\int_{Z_-(f-p_j)} Q(x)p(\lambda|f(x)-p_j(x)|)dx \\
&\quad \geq \int_{Z_-(f-p_j)} Q(x)p(\lambda|f(x)-p_i(x)|)dx + B_i + A_j.
\end{aligned} \tag{7}$$

由(2), (6), (7)易知$A_i + A_j + B_i + B_j \leq 0$, 即$A_r = B_r = 0 (r = i, j)$, 故

$$Z_+(f-p_i)\cap Z_-(f-p_j) = Z_-(f-p_i)\cap Z_+(f-p_j) = \varnothing.$$

由此可见, 对任意$x \in [-1, 1]$, 应有$f(x) \geq \max\{p_i(x), p_j(x)\}$或$f(x) \leq \min\{p_i(x), p_j(x)\}$. 下面假定$Z(p^*)\cap(-1, 1) = \{x_1, x_2, \cdots, x_s\}$, $-1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_s < x_{s+1} = 1$, 则由上看出$f(x) - p_j(x)$在每一区间$[x_k, x_{k+1}] (k = 0, 1, \cdots, s)$上不改变符号, 故$f(x) - p_j(x)$至多$s$次改变符号, 而显然有$s < j$, 这与[6]中的定理4矛盾. 定理1得证.

定理2的证明类似于定理1的证明(略).

定理3的证明　充分性是显然的, 只要取$f = p_j$即可. 下面证明必要性, 只证范数$\|\cdot\|_M$的情形, 范数$\|\cdot\|_{(M)}$的情形同样可证. 由于$p(u) = u$, 故由条件及[5]中的推论1.3知, 对于次数不超过$r (r = i, j)$的任意多项式$Q_r(x)$, 有

$$\int_{-1}^{1} Q_r(x)\lambda_r|f(x) - p_r(x)|\operatorname{sgn}(f(x) - p_r(x))dx = 0 \ (r = i, j), \tag{8}$$

此处$\lambda_r > 0$满足$\lambda_r^2 = 2/\int_{-1}^{1}(f(x) - p_r(x))^2dx$. 故由(8)知

$$\int_{1} Q_r(x)(f(x) - p_r(x))dx = 0 \quad (r = i, j). \tag{9}$$

因(9)中的 $Q_r(x)$ 是次数不超过 r 的任意多项式, 所以容易推出

$$\int_{1} Q_i(x)(p_j(x) - p_i(x))dx = 0,$$

从而, 对于满足 $\int_{1} N[p(\lambda|p_j(x) - p_i(x)|)]dx = 1$ 的 λ, 必有

$$\int_{1} Q_i(x)\lambda|p_j(x) - p_i(x)|\operatorname{sgn}(p_j(x) - p_i(x))dx = 0,$$

故由[5]中的推论 1. 3 知, p_i 是 p_j 的关于范数 $\|\cdot\|_M$ 的 i 次最佳逼近多项式

参 考 文 献

[1] T. J. Rivlin, *New and unsolved problems, No. 14: Best algebraic approximation*, in "*Abstract Spaces and Approximation*", Birkhauser Verlag, Basel/Stuttgart, 10(1969), 421.

[2] F. Deutsch, P. D. Morris and I Singer, *On a problem of T. J. Rivlin in approximation theory*, J. A. T., 2(1969), 342- 352.

[3] M. R. Subrahmanya, *On simultaneous best approximations in* $C^1[a, b]$, J. A. T., 26(1979), 101- 107.

[4] 吴从炘、王廷辅著, 奥尔里奇空间及其应用, 黑龙江科技出版社, 哈尔滨, 1983.

[5] 王玉文、陈述涛, Orlicz 空间内最佳逼近算子, 纯粹数学与应用数学, 2(1986), 44- 51.

[6] C. B. Dunham, *Families satisfying the Haar condition*, J. A. T., 12(1974), 291- 298.

On a Problem of T. J. Rivlin

Wu Garidi

(Inner Mongolia Normal University, Hohhot 010022)

Chen Guangrong

(Hebei Institute of Mechno-Electric Engineering, Shijiazhuang 050054)

Abstract

In this paper, we solve the problem of T. J. Rivlin with respect to two kind of norms $\|\cdot\|_M$ (Orlicz norm) and $\|\cdot\|_{(M)}$ (Luxemburg norm) in the continuous function space.

Keywords N-function, polynomial, approximation, norm.