第 17 卷第 2 期　　　　数 学 研 究 与 评 论　　　　Vol. 17 No. 2
1997 年 5 月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 1997

投影下的 Gronwall 不等式*

张　伟　年
(中国科学院成都计算所数理科学中心, 成都 610041)

摘　要　本文对 J. K. Hale 曾提出的一类广泛的投影下的 Gronwall 不等式问题作了讨论, 对满足 $u(t) \le a(t) + \int b(t-s)u(s)ds + \int^{\infty} c(s)u(t+s)ds,\ \forall t \ge 0$ 的函数 $u(t) \in C_b^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$ 作了估计. 其结果对讨论微分方程的有界解、不变流形及其 Foliation 和进一步讨论奇性 Gronwall 不等式都有意义

关键词　微分方程, Gronwall 不等式, 有界解
分类号　AMS(1991) 34A40/CCL O175.11

许多工作如[1-5]都表明, 研究微分方程

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + f(t, x(t)) \tag{1}$$

(其中 $t \in \mathbf{R}$, $x(t) \in X$, X 为 Banach 空间) 的有界轨或半有界轨的一个重要手段是讨论方程(1)的投影形式

$$x(t) = T(t,\tau)P_-(\tau)x(\tau) + \int T(t,s)P_-(s)f(s,x(s))ds + \int_{\infty} T(t,s)P_+(s)f(s,x(s))ds,\quad t \ge \tau, \tag{2}$$

$$x(t) = T(t,\tau)P_+(\tau)x(\tau) + \int T(t,s)P_+(s)f(s,x(s))ds + \int_{\infty} T(t,s)P_-(s)f(s,x(s))ds,\quad t \le \tau, \tag{3}$$

其中 $T(t,\tau)$ 为(1)线性部分的基本解算子(或称为 evolution 算子) 而 $P_-(s) = I - P_+(s)$ 是其指数二分性或广义指数二分性[5]所确定的投影算子. 为了从(2) (类似地考虑(3)) 给出 $x(t)$ 的估计, J. K. Hale[1]于 1969 年用 Gronwall 不等式导出了下列结果:

引理 1　设 $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, K, L, M 是非负常数 $u(t)$ 是 $[0, +\infty)$ 上非负、有界连续函数(简记为 $u \in C_b^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$), 满足

$$u(t) \le Ke^{-\alpha t} + L\int^{t} e^{-\alpha(t-s)}u(s)ds + M\int^{\infty} e^{-\gamma s}u(t+s)ds,\ \forall t \ge 0. \tag{4}$$

如果 $\beta \overset{\text{def}}{=} \frac{L}{\alpha} + \frac{M}{\gamma} < 1$, 则

$$u(t) \le (1-\beta)^{-1}K\exp[-(\alpha - (1-\beta)^{-1}L)t],\quad \forall t \ge 0. \tag{5}$$

* 1994 年 4 月 15 日收到

1993 年作者[5]为讨论非自治系统一般不变流形的 Foliation (层叠构造) 的概周期性质又给出

引理 2 设 $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, a, b, b_1, c, d 为实常数, a, c, d 非负 $u(t) \in C_b^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$ 满足

$$u(t) \leq a + be^{-\alpha t} + b_1 te^{-\alpha t} + c\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}u(s)ds + d\int_0^\infty e^{-\gamma s}u(t+s)ds, \quad \forall t \geq 0. \tag{6}$$

如果 $\beta \overset{\text{def}}{=} \dfrac{c}{\alpha} + \dfrac{d}{\gamma} < 1$, 则

$$u(t) \leq \frac{a}{1-\beta} + \frac{b_1}{c}e^{-\alpha t} + \frac{|\tilde{b}|}{1-\beta}\exp\left[-\left(\alpha - \frac{c}{1-\beta}\right)t\right], \ \forall t \geq 0, \tag{7}$$

其中

$$\tilde{b} = b - \frac{b_1}{c} + \frac{b_1 d}{c(\alpha+\gamma)} - \frac{ac}{(1-\beta)\alpha}. \tag{8}$$

[6]还更广泛地证明了

引理 3 设 $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $a, b_i, c, d \in \mathbf{R}^1$ $(i = 0, 1, \cdots, m)$, a, c, d 非负 $u(t) \in C_b^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$ 满足

$$u(t) \leq a + e^{-\alpha t}\left(\sum_{i=0}^m b_i t^i\right) + c\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}u(s)ds + d\int_0^\infty e^{-\gamma s}u(t+s)ds, \quad \forall t \geq 0. \tag{9}$$

如果 $\beta \overset{\text{def}}{=} \dfrac{c}{\alpha} + \dfrac{d}{\gamma} < 1$, 则

$$u(t) \leq \frac{a}{1-\beta} + e^{-\alpha t}\left(\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i q_i t^i\right) + \frac{|K|}{1-\beta}\exp\left[-\left(\alpha - \frac{c}{1-\beta}\right)t\right], \quad \forall t \geq 0, \tag{10}$$

其中 q_i $(i = 0, 1, \cdots, m-1)$ 和 K 是确定的实常数 (详见[6]).

关于投影下 Gronwall 不等式问题的更一般提法已被 J. K. Hale[1]指出, 即要对满足

$$u(t) \leq a(t) + \int_0^t b(t-s)u(s)ds + \int_0^\infty c(s)u(t+s)ds \tag{11}$$

$(\forall t \geq 0)$ 的函数 $u(t) \in C_b^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$ 作估计. 本文就此问题给出了如下结果:

定理 设 $a(t), b(t), c(t) \in C^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$, 且

1° $a(t)$ 和 $b(t)$ 单调不增, $a(t), b(t) \to 0$ $(t \to +\infty)$;

2° $\int_0^\infty b(s)ds < \infty$, $\int_0^\infty c(s)ds < \infty$, $\beta \overset{\text{def}}{=} \int_0^\infty b(s)ds + \int_0^\infty c(s)ds < 1$;

3° 导数 $\mathring{b}(s) \leq \delta b(s)$, δ 为实常数,

则对满足 (11) 的函数 $u(t) \in C_b^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$ 有估计式

$$u(t) \leq \frac{a(t)}{1-\beta} + \frac{b(0)}{(1-\beta)^2}\int_0^t a(s)e^{[\delta+(1-\beta)^{-1}b(0)](t-s)}ds, \ \forall t \geq 0, \tag{12}$$

并且 $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = 0$. 特别当 $a(t) = a_0$ 常数时, 对 $\forall t \geq 0$ 有

$$u(t) \leq \frac{a_0}{1-\beta} + \frac{a_0 b(0)}{(1-\beta)^2[\delta + b(0)/(1-\beta)]}\left(e^{[(\delta+(1-\beta)^{-1}b(0)]t} - 1\right]. \tag{13}$$

证明 第一步, 证明 $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = 0$. 假设: $\gamma = \lim\limits_{t\to\infty} u(t) > 0$. 由于 $u(t)$ 有界, 必 $0 < \rho < \infty$. 任取 $\theta < 1$, 则 $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = \rho < \theta^{-1}\gamma$, 即 $\exists t_0 \geq 0$, 当 $t \geq t_0$ 时 $u(t) \leq \theta^{-1}\rho$. 由 (11), 对 $\forall t \geq t_0$,

$$u(t) \leq a(t) + \int_0^{t_0} b(t-s)u(s)ds + \int_{t_0}^t b(t-s)u(s)ds + \int_0^\infty c(s)u(t+s)ds$$

$$\leq a(t) + \int^{0} b(t-s)u(s)ds + \theta^{-1}\gamma\left(\int^{t_0} b(\tau)d\tau + \int^{\infty} c(s)ds\right). \tag{14}$$

令 $t\to+\infty$ 得

$$\gamma \leq \theta^{-1}\gamma\left(\int^{\infty} b(s)ds + \int^{\infty} c(s)ds\right) = \theta^{-1}\gamma\beta \leq (\text{由}\ \theta\ \text{取法任意, 不妨取}\ \beta < \theta < 1) < \gamma, \tag{15}$$

从而导出矛盾, 因此 $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = 0$.

第二步, 简化(11)表达. 记 $v(t) = \sup\limits_{s\geq t} u(s)$. 从定义不难看出 $v(t)\geq u(t)$ 且 $v(t)$ 单调不增, $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = 0$. 因此对 $\forall t\in[0,\infty)$, $\exists\ t_1\geq t$ 使

$$v(s)\begin{cases} = v(t) = u(t_1), & \text{若}\ t\leq s\leq t_1, \\ < v(t_1), & \text{若}\ s > t_1. \end{cases} \tag{16}$$

从而知道

$$\begin{aligned} v(t) = u(t_1) &\leq a(t_1) + \int b(t_1 - s)v(s)ds + \int^{t_1} b(t_1 - s)v(s)ds + \int^{\infty} c(s)v(t_1 + s)ds \\ &\leq a(t_1) + \int b(t_1 - s)v(s)ds + v(t)\left[\int^{t_1} b(t_1 - s)ds + \int^{\infty} c(s)ds\right] \\ &\leq a(t_1) + \int b(t_1 - s)v(s)ds + v(t)\left[\int^{\infty} b(s)ds + \int^{\infty} c(s)ds\right] \\ &\leq (\text{由}\ a(t)\ \text{和}\ b(t)\ \text{的单调性}) \leq a(t) + \int b(t-s)v(s)ds + v(t)\beta, \end{aligned} \tag{17}$$

即

$$v(t) \leq \frac{a(t)}{1-\beta} + \frac{1}{1-\beta}\int b(t-s)v(s)ds, \tag{18}$$

对 $\forall t\geq 0$.

第三步, 讨论(18)式. 为此令

$$R(t) = \int \frac{b(t-s)}{1-\beta} v(s)ds, \tag{19}$$

则 $R(t)$ 的导数

$$\begin{aligned} \mathring{R}(t) &= \int \frac{\mathring{b}(t-s)}{1-\beta} v(s)ds + \frac{b(0)}{1-\beta} v(t) \leq \delta \int \frac{b(t-s)}{1-\beta} v(s)ds + \frac{b(0)}{1-\beta} v(t) \\ &\leq (\text{代入(18)和(19)式}) \leq \delta R(t) + \frac{b(0)}{1-\beta}\left(\frac{a(t)}{1-\beta} + R(t)\right) \\ &= \left(\delta + \frac{b(0)}{1-\beta}\right)R(t) + \frac{b(0)}{(1-\beta)^2} a(t),\quad \forall t\geq 0. \end{aligned} \tag{20}$$

由比较定理得到(对 $\forall t\geq 0$)

$$R(t) \leq \int \frac{b(0)}{(1-\beta)^2} a(s)\exp\left[\left(\delta + \frac{b(0)}{1-\beta}\right)(t-s)\right]ds. \tag{21}$$

由(18)得

$$v(t) \leq \frac{a(t)}{1-\beta} + R(t) \leq \frac{a(t)}{1-\beta} + \frac{b(0)}{(1-\beta)^2}\int a(s)\exp\left[\left(\delta + \frac{b(0)}{1-\beta}\right)(t-s)\right]ds,$$

即不等式(12)得证. 进一步的结果(13)不难从(12)中导出, 从而定理证毕.

最后做几点注记.

注记 1　对于引理 1, 2 和 3 曾讨论过的不等式(4)、(6)和(9), 令 $b(t)=Le^{-\alpha t}$(或 $ce^{-\alpha t}$), 不难看出它们都是不等式(11)的特殊形式而且 $\dot{b}(t)=-\alpha Le^{-\alpha t}\leq-\alpha b(t)$. 因此定理中的条件假设是有意义的.

注记 2　对 $t\leq 0$ 时, 类似于(3)的情形下, 也可得到相应的结论.

注记 3　本文的讨论最终化归讨论不等式(18). 在 $b(t)$ 的一定条件下可以使(18)带有奇性, 如 D. Henry[7] 和叶其孝[8]等人提到的不等式

$$v(t)\leq A(t)+B_0\int(t-s)^{p-1}v(s)ds,\quad\forall t\geq 0,\tag{22}$$

其中 $B_0\geq 0$, $0<p<1$. 这种奇性的 Gronwall 不等式对讨论抛物型偏微分方程十分有用. 因此深入讨论不等式(18)和(11)是很有意义的.

参　考　文　献

[1] J. K. Hale, *Ordinary Differential Equations*, Wiley-Interscience, New York, 1969.

[2] K. J. Palmer, *Exponential dichotomies and transversal homoclinic points*, J. Diff. Eqns., 55 (1984), 225-256.

[3] X. B. Lin, *Exponential dichotomies and homoclinic orbits in functional differential equations*, J. Diff. Eqns., 63(1986), 227-254.

[4] Zhang Weinian, *Invariant manifolds for differential equations*, Acta Math. Sinica, New Series, 8: 4(1992), 375-398.

[5] Zhang Weinian, *Generalized exponential dichotomies and invariant manifolds for differential equations*, Advances in Math (China), 22: 1(1993), 1-45.

[6] Zhang Weinian, *A generalized theorem on integral inequalities*, Annals of Diff. Eqns., 9: 4(1993), 1-6.

[7] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Lecture Notes in Math., Vol. 840, Springer, 1981.

[8] 叶其孝, 李正元, 反应扩散方程引论, 科学出版社, 1990.

Gronwall Inequality for Projected Systems

Zhang Weinian

(Centre for Math. Sci., CICA, Academia Sinica Chengdu 610041)

Abstract

In this paper we discuss a problem about Gronwall inequality for projected systems, which was mentioned in Hale's book. An estimate for nonnegative bounded continuous function $u(t)$ on R_+ satisfying $u(t)\leq a(t)+\int b(t-s)u(s)ds+\int^{\infty}c(s)u(t+s)ds$, $\forall t\geq 0$ is given. The conclusion is useful for investigating bounded solutions, invariant manifolds and its foliations for differential equations, and for further discussion on Gronwall inequality with singularity.

Keywords　differential equation, Gronwall inequality, bounded solution.