第17卷第2期 数学研究与评论 Vol.17 No.2
1997年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1997

五角子空间格的性质*

李 建 奎
(中国科技大学数学系, 合肥230026)

摘 要 本文证明了若$\mathcal{L}$为五角子空间格, 则alg$\mathcal{L}$和alg($\mathcal{L}\geq\mathcal{L}$)的每一非0单元为秩1算子, 另外也考虑了$\mathcal{L}$和别的子空间格的序和所对应的代数中秩1算子和单元的关系

关键词 五角子空间格, 秩1算子, 单元

分类号 AMS(1991) 47D25/CCL O177.1

§1 引 言

在对子空间格的性质的研究中, 对五角格的研究是十分重要的. 从对五角格研究中, 可以获得一些信息指导本文对于非模格以及元素较少格的研究. 本文中主要是研究$\mathcal{L}$为五角格时alg$\mathcal{L}$中非0单元(single)的性质. 另外也考虑了五角格和别的子空间格序和、序积[1]所对应的代数的单元的性质. 若$\mathcal{A}$为一代数, $S\in\mathcal{A}$称为单的, 如果$a, b\in\mathcal{A}$, $aSb=0$蕴涵$aS=0$或$Sb=0$. 由单元的定义可知, 若S为代数$\mathcal{A}\subseteq L(H)$的秩1算子, S必为单元, 反之不成立. 关于这方面的例子可见[1].

本文中H表示复Hilbert空间, $J(H)$表示H的闭子空间全体所构成的格. 若$\mathcal{L}\subseteq J(H)$是$J(H)$的完备子格并且包含(0)和$H$, 则称$\mathcal{L}$为子空间格. 若$\mathcal{L}$为子空间格, $M\in\mathcal{L}$, 文中用M_-表示$\vee\{K\in\mathcal{L}: M\not\subseteq K\}$, J表示集合$\{M: M_-\neq H, M\neq(0), M\in\mathcal{L}\}$. 若$e, f\in H$, $e\otimes f$表示算子$x\to(x, e)f$ $(x\in H)$.

§2 几个结果

为了讨论五角子空间格$\mathcal{L}$的性质, 先证明下面对比较一般的子空间格也成立的几个引理.

引理1 $\mathcal{L}$为一子空间格.

(1) 若$\cap\{M_-: M\in J\}=(0)$, $A\in$alg$\mathcal{L}$满足$\forall R\in$alg$\mathcal{L}$, rank$R=1$, $RA=0$, 则$A=0$.

(2) 若$\vee\{M: M\in J\}=H$, $A\in$alg$\mathcal{L}$满足$\forall R\in$alg$\mathcal{L}$, rank$R=1$, $AR=0$, 则$A=0$.

证明 (1) $\forall M\in J$, $\forall e\in(M_-)^\perp$, $\forall f\in M$, $\forall x\in H$. 由引理3.1[2]可知$e\otimes f\in$alg$\mathcal{L}$, 因此$e\otimes fAx=(Ax, e)f=0$. 故$AH\subseteq M_-$. 由M为J中任意元可知$AH\subseteq\cap\{M_-: M\in J\}=(0)$, 因此$A=0$.

---

* 1993年11月8日收到. 1996年11月12日收到修改稿

(2) 可类似于(1)证明 □

引理2 若$\mathcal{L}$为子空间格满足$\cap\{M_-:M\in J\}=(0)$, $\vee\{M:M\in J\}=H$, 则$S\in\mathrm{alg}\mathcal{L}$是单的充要条件是对$\mathrm{alg}\mathcal{L}$中任意的秩1算子$R_1, R_2$条件$R_1SR_2=0$蕴涵$R_1S=0$或$SR_2=0$.

证明 仅需证明充分性. 若$A, B\in\mathrm{alg}\mathcal{L}$, $ASB=0$, 如果$AS\neq 0$, 由引理1可知存在$\mathrm{alg}\mathcal{L}$中的秩1算子R_1满足$R_1AS\neq 0$, 但是对$\mathrm{alg}\mathcal{L}$中的任何秩1算子R_2, 有$R_1ASBR_2=0$. 因为R_1A和BR_2的秩都不超过1, 由已知条件可知$SBR_2=0$, 再由引理1可知$SB=0$. □

引理3 若$\mathcal{L}$为子空间格满足$\cap\{M_-:M\in J\}=(0)$, $\vee\{M:M\in J\}=H$, S为$\mathrm{alg}\mathcal{L}$中单的非0元, 则

(1) 存在$M\in J$有$S|_M\neq 0$并且若$M\in J$, $S|_M\neq 0$, 则$S|_M$是秩1算子.

(2) 存在$M\in J$有$S^*|_{(M_-)^\perp}\neq 0$并且若$L\in J$, $S^*|_{(L_-)^\perp}\neq 0$, 则$S^*|_{(L_-)^\perp}$为秩1算子.

证明 (1) 由$H=\vee\{M:M\in J\}$, $S\neq 0$可知存在$M\in J$满足$RS\neq 0$. $\forall x, y\in M$, 不妨设Sx和Sy全不为0, 由RS为秩1算子可知存在复数λ, μ满足

$$RS(\lambda x+\mu y)=\lambda RSx+\mu RSy=0.$$

$\forall e\in(M_-)^\perp$, 因为$e\otimes(\lambda x+\mu y)\in\mathrm{alg}\mathcal{L}$, 所以

$$RS[e\otimes(\lambda x+\mu y)]=0.$$

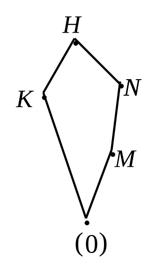
由S是单的可知

$$S[e\otimes(\lambda x+\mu y)]=e\otimes(\lambda Sx+\mu Sy)=0,$$

故Sx和Sy是线性相关的, 即$S|_M$为秩1算子.

(2) 由于$S^*\neq 0$, $\vee\{(M_-)^\perp:M\in J\}=H$, 可知存在$M\in J$有$S^*|_{(M_-)^\perp}\neq 0$, 类似于(1)可证(2).

下文中所谈到的五角子空间格$\mathcal{L}=\{(0), K, M, N, H\}$的Hasse图如右图所示. 这时$J=\{K, M\}$, $K_-=N$, $M_-=K$, $\vee\{L:L\in J\}=K\vee M=H$, $\cap\{L_-:L\in J\}=N\cap K=(0)$. 关于五角子空间格的例子和它的自反性的讨论, 读者可参见[4, 5].



引理4 $\mathcal{L}$为五角子空间格, S是$\mathrm{alg}\mathcal{L}$中单的非0元

(1) 若$S|_M\neq 0$, 则$S(H)\subseteq N$.

(2) 若$S|_K\neq 0$, 则$S(H)\subseteq K$.

证明 (1) 任取$a\in M$满足$S(a)\neq 0$, $\forall b\in(M_-)^\perp=K^\perp$且$b\neq 0$. 对于$\forall n\in K$, $\forall m\in(K_-)^\perp=N^\perp\subseteq M^\perp$, 由于

$$m\otimes nSb\otimes a=(S(a), m)b\otimes n=0,$$

以及$Sb\otimes a\neq 0$, 有$m\otimes nS=0$, 即$S(H)\subseteq(N^\perp)^\perp=N$.

(2) 任取$a\in K$满足$S(a)\neq 0$, $\forall b\in(K_-)^\perp=N^\perp$且$b\neq 0$. $\forall m\in M$, $\forall n\in(M_-)^\perp=K^\perp$, 由于

$$n\otimes mSb\otimes a=(S(a), n)b\otimes m=0,$$

S是单的且$Sb\otimes a\neq 0$, 故$S(H)\subseteq(K^\perp)^\perp=K$. □

关于下面引理的证明可见[1].

引理5 若H_0是H的范数稠的子空间, $A\in L(H)$, $A|_{H_0}$是有限秩算子, 则$A(H_0)=A(H)$.

下面证明本文中的几个主要结果

定理6　若$\mathcal{L}$为五角子空间格，则 alg$\mathcal{L}$ 中的元S是非0单元的充要条件是：S是 alg$\mathcal{L}$ 中的秩1算子.

证明　充分性是显然的. 下证必要性. 若S是 alg$\mathcal{L}$ 中单的非0元，由引理3可知存在$L\in\mathcal{J}$有$S|_L\neq 0$, $S|_L$为秩1算子.

(i)　若$L=K$时，由引理4可知$S(H)\subseteq K$，因此$S(M)\subseteq K\cap M=(0)$. 这时

$$S(\text{span}\{x, y\,|\,x\in K, y\in M\})\subseteq S(K).$$

由引理5可知$S(K\vee M)=S(H)\subseteq S(K)$，所以$S$是秩1算子.

(ii)　若$L=M$时，由引理4知$S(H)\subseteq N$，因此$S(K)\subseteq K\cap N=(0)$. 故

$$S(\text{span}\{x, y\,|\,x\in K, y\in M\})\subseteq S(M).$$

由引理5知$S(K\vee M)=S(H)\subseteq S(M)$，故$S$是秩1算子. □

命题7　若$\mathcal{L}_1$和$\mathcal{L}_2$分别为H_1和H_2的子空间格，其中之一为 nest，另一个满足$\vee\{M: M\in\mathcal{J}\}=H$, $\cap\{M_-: M\in\mathcal{J}\}=(0)$，则 alg$(\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2)$中每一非0单元为秩1算子.

证明　假设S为 alg$(\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2)$中的非0单元.

(i)　若$\mathcal{L}_2$为 nest，令$H_0=\text{span}\{x: x\in H_1\oplus M, M\in\mathcal{L}_2, M_-\neq H_2, M\neq(0)\}$. 由于$\mathcal{L}_2$为 nest，有$H_0$在$H_1\oplus H_2$中是范数稠的. $\forall x, y\in H_0$，下证Sx和Sy是线性相关的. 由于$x, y\in H_0$可知存在$M\in\mathcal{L}_2$, $M_-\neq H_2$有$x, y\in H_1\oplus M$，易验证$\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2$满足引理3的条件，这样$S|_{H_1\oplus M}$的秩$\leq 1$，因此$Sx$和$Sy$是线性相关的. 由引理5知$S$是秩1算子.

(ii)　若$\mathcal{L}_1$为 nest 时，令$\tilde{H}=\text{span}\{x: x\in(K_-)^\perp, K\in\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2, K\neq(0), K_-\neq H_1\oplus H_2\}$，由$\mathcal{L}_1$和$\mathcal{L}_2$的性质可知$\tilde{H}$在$H$中是范数稠的. 相似于(i)可证明$S|_{\tilde{H}}$是秩1算子，由引理5可知$S$为秩1算子. □

注　1°　命题7改进了定理4.2[1]. 事实上有很多子空间格满足$\vee\{M: M\in\mathcal{J}\}=H$, $\cap\{M_-: M\in\mathcal{J}\}=(0)$不是分配的，因此不是完全分配的. 五角子空间格就是一明显的例子.

2°　若$T\in\mathcal{L}(H)$, $0\in\sigma(T)$, $0\notin\pi(T)$ ($\pi(T)$表示T的近似点谱的全体)，$\mathcal{L}$为H的子空间格满足$H=\vee\{M: M\in\mathcal{J}\}$, $(0)=\cap\{M_-: M\in\mathcal{J}\}$，令$\tilde{\mathcal{L}}=\{T\mathcal{L}, H\}$，由命题7可知 alg$\tilde{\mathcal{L}}$ 中任一单元为0或秩1算子.

定理8　若$\mathcal{L}$为子空间格满足$\cap\{M_-: M\in\mathcal{J}\}=(0)$, $\vee\{M: M\in\mathcal{J}\}=H$，则 alg$(\mathcal{L}\geq\mathcal{L})$中任意非0单元为秩1算子的充要条件是 alg$\mathcal{L}$ 中任意非0单元为秩1算子.

证明　若 alg$(\mathcal{L}\geq\mathcal{L})$中每一非0单元为秩1算子，如果$S$是 alg$\mathcal{L}$ 中非0单元，这时$\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$为 alg$(\mathcal{L}\geq\mathcal{L})$中非0单元，故$S$是秩1算子.

反之，若$\begin{pmatrix} S & T \\ 0 & U \end{pmatrix}$是 alg$(\mathcal{L}\geq\mathcal{L})$中非0单的，易证$S, T, U$分别是 alg$\mathcal{L}$ 中单的. 由于

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S & T \\ 0 & U \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=0,$$

可知 alg$(\mathcal{L}\geq\mathcal{L})$中的单元必为下面形式的元之一，

$$r_1=\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad r_2=\begin{pmatrix} 0 & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad r_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix},$$

$$r_4 = \begin{pmatrix} S & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r_5 = \begin{pmatrix} 0 & T \\ 0 & U \end{pmatrix}.$$

由已知易证 r_1, r_2, r_3 为秩1算子. 下证 r_4 和 r_5 也为秩1算子. 先考虑 r_4, 若 $S = x \otimes y, T = m \otimes n$, 下证 $T + S$ 为秩1算子. 若不然, 由已知条件可知存在 $A, B \in \mathrm{alg}\mathcal{L}$ 满足 $A(S+T)B = 0$, 但是 $A(S+T) \neq 0$, $(S+T)B \neq 0$. 这时有

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & B \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0, \quad \begin{pmatrix} S & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & B \end{pmatrix} \neq 0,$$

这与 $\begin{pmatrix} S & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是单的矛盾. 故 $S + T$ 为秩1算子. 下证 y 和 n 是线性相关的. 若不然, 因为 $S + T = x \otimes y + m \otimes n$ 为秩1算子, 这样 x 和 m 就线性相关, 不妨设 $x = \lambda m$. 由于 $\cap\{K_- : K \in \mathcal{J}\} = (0)$. 故存在 $K \in \mathcal{J}$, $p \in (K_-)^{\perp}$ 满足 $(y, p) = 1$, $\forall q \in K$, $p \otimes q \in \mathrm{alg}\mathcal{L}$, 且

$$\begin{pmatrix} p \otimes q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & (n, p)I \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

由于 $\begin{pmatrix} p \otimes q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ 和 $\begin{pmatrix} S & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是单的, 可知

$$\begin{pmatrix} S & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & (n, p)I \\ 0 & -\lambda I \end{pmatrix} = 0,$$

因此 $(n, p)S - \lambda T = 0 = (n, p)x \otimes y - \lambda m \otimes n = (n, p)x \otimes y - x \otimes n$, 这与 y 和 n 线性无关矛盾. 令 $y = tn$ 时,

$$\begin{pmatrix} S & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \otimes (tn) & m \otimes n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma \\ \omega \end{pmatrix} = [t(\gamma, x) + (\omega, m)]\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

因此 $\begin{pmatrix} S & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 为秩1算子.

对于证明 r_5 也为秩1算子, 相似于 r_4 的证明可证 $T + U$ 为秩1算子. 若 $T = m \otimes n, U = \gamma \otimes \omega$ 时, 用条件 $\vee\{M : M \in \mathcal{J}\} = H$ 可证明 m 与 γ 是线性相关的. 不妨设 $m = \lambda\gamma$, 这时

$$\begin{pmatrix} 0 & T \\ 0 & U \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda\gamma \otimes n \\ 0 & \gamma \otimes \omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (y, \gamma)\begin{pmatrix} \lambda n \\ \omega \end{pmatrix},$$

因此 $\begin{pmatrix} 0 & T \\ 0 & U \end{pmatrix}$ 是秩1算子. 综合上面的情况可知 $\mathrm{alg}(\mathcal{L} \geq \mathcal{L})$ 中非0单元必为秩1算子. □

推论9 若 $\mathcal{L}$ 为五角子空间格, 则 $\mathrm{alg}(\mathcal{L} \geq \mathcal{L})$ 中非0单元为秩1算子.

作者对王声望教授的指导和帮助表示衷心感谢

参 考 文 献

[1] M. S. Lambrou, *On the rank of operators in algebras*, Lin. Alg. Appl., 142(1990), 211-235.

[2] W. E. Longstaff, *Strongly reflexive lattices*, J. London Math. Soc., 11:2(1975), 491-498.

[3] 李建奎, 自反子空间和自反格, 南京大学博士论文, 1993.

[4] E. Kissin, *On some reflexive lattices of subspaces*, J. Operator Theory, 25(1991), 141-162.

[5] P. R. Halmos, *Reflexive lattices of subspaces*, J. London Math. Soc., 4(1971), 257-263.
[6] K. R. Davidson, *Nest Algebras*, Vol. 191, Research Notes in Math. Longman Scientific and Technical, New York, 1988.

Some Properties of Pentagon Subspace Lattices

Li Jiankui
(Dept. of Math., University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

Abstract

In this paper, we prove that if $\mathcal{L}$ is a pentagon subspace lattices, then every nonzero single element of alg$\mathcal{L}$ is rank one. We also consider single elements of alg$(\mathcal{L} \geq \mathcal{L})$ and obtain some other results.

Keywords penttagon subspace lattice, rank one operator, single element.