一般形式多阶段有补偿问题的广义对偶理论*

陈志平　　徐成贤

(西安交通大学数学系, 西安710049)

摘　要　本文在文[1]的基础上, 讨论一般形式多阶段有补偿非线性随机规划问题的广义对偶理论与最优化性条件. 通过发掘凸规划对偶理论的本质, 首先推广了与通常规划问题对偶理论有关的概念的含义, 由此构造出所论问题在等价意义下的广义原始泛函与广义对偶泛函, 进而得到其广义对偶理论, 所得结论不仅能恰当合理地反映问题本身的属性, 而且有关定理的表述形式简明、结论较强, 可直接应用于多阶段有补偿问题的其它理论研究与数值求解算法的设计中去. 上述结果与所用研究方法均推广和发展了通常的对偶理论.

关键词　多阶段有补偿问题, 随机规划, 广义鞍点定理, 凸分析.

分类号　AMS(1991) 90C15/CCL O221.5

§1　引　言

文[1]给出了Banach 空间中 $K+1$(K 为某一有限正整数) 阶段有补偿非线性随机规划问题的一般形式, 其第 k 阶段子问题为:

$$\begin{aligned} &\min_{x_k\geq\theta_k}\ c_k(x_k, y_k(\omega)) + \overline{Q}_{k+1}(x_k, y_k(\omega)), \\ &\text{s.t.}\ \ g_{kj}(x_k, y_k(\omega)) \leq 0, \quad j=1,2,\cdots,J_k, k=K, K-1,\cdots,1, \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $\overline{Q}_{k+1}$: $\prod_{i=0}^{k}X^i\times\prod_{j=1}^{k}Y^j\to[-\infty,+\infty]$ 为已知或已被定义的阶段($k+1$)的最优补偿或反馈函数

$$\overline{Q}_{k+1}(x_k, y_k(\omega)) = \int Q_{k+1}(x_k, y_k(\omega), y_{k+1})\,dF_{y_{k+1}|y_k}(y_{k+1}|y_k(\omega)). \tag{2}$$

问题(1)是就某一固定的 x_{k-1} 及 $y_k(\omega)$ 关于 x_k 求极小, 其最优值和最优解与 x_{k-1} 和 $y_k(\omega)$ 有关, 记其最优值为 $Q_k(x_{k-1}, y_k(\omega))$ (若该问题不可行, 则取值 $+\infty$), 并令

$$\overline{Q}_{k+1}(x_k, y_k(\omega)) \equiv 0.$$

第0阶段子问题定义为

$$\begin{aligned} &\min_{x_0\geq\theta_0}\ c_0(x_0) + \int Q_1(x_0, y_1(\omega))\,dF_{y_1}(y_1(\omega)), \\ &\text{s.t.}\ \ g_{0j}(x_0) \leq 0, \quad j=1,2,\cdots,J_0. \end{aligned} \tag{3}$$

这就完成了 $K+1$阶段有补偿问题的循环定义. 这里的 $X^k(0\leq k\leq K)$, $Y^k(1\leq k\leq K)$ 为自反、可

* 1994年5月16日收到.

分的Banach 空间, $x_k \in X^k$ 为确定性向量, y_k: $\Omega \to Y^k$ 为随机元(Ω 为某一概率空间中的样本集), 即对任意的样本点 $\omega \in \Omega$, 有 $y_k(\omega) \in Y^k$, x_k, $y_k(\omega)$ 分别为第 k 阶段子问题的决策变元与状态向量 $\underset{\sim}{x}_k = (x_0, x_1, \cdots, x_k)$, $\underset{\sim}{y}_k(\omega) = (y_1(\omega), y_2(\omega), \cdots, y_k(\omega))$. 其中 θ_k $(0 \le k \le K)$ 为空间 X^k 中的零元素, J_k $(0 \le k \le K)$ 为某一正整数 $F_{y_k|\underset{\sim}{y}_{k-1}}$ 为 y_k 关于某一给定的 $\underset{\sim}{y}_{k-1}(\omega)$ 的正规条件分布函数, F_{y_1} 为 y_1 的正规分布函数 而 c_k, g_{kj} $(1 \le j \le J_k, 0 \le k \le K)$ 分别为相应变元的实值函数 通常问题(1)—(3)满足下列条件:

(a) $c_0, g_{0j}: X^0 \to (-\infty, +\infty]$ 为恰当、下半连续(lsc)凸泛函 而 $c_k, g_{kj}: \prod_{i=0}^{k} X^i \times \prod_{j=1}^{k} Y^j \to (-\infty, +\infty]$ $(1 \le k \le K, 1 \le j \le J_k)$ 对任意给定的 $\underset{\sim}{y}_k(\omega)$ 关于 $\underset{\sim}{x}_k$ 为恰当 lsc 凸泛函; 而对于任给的 $\underset{\sim}{x}_k$ 关于 $\underset{\sim}{y}_k(\omega)$ Borel 可测;

(b) $\mathrm{dom}\ c_k(\underset{\sim}{x}_{k-1}, \cdot, \underset{\sim}{y}_k(\omega)) \supset \{x_k: x_k \ge \theta_k, g_{kj}(\underset{\sim}{x}_{k-1}, \cdot, \underset{\sim}{y}_k(\omega)) \le 0, \ j = 1, 2, \cdots, J_k\}$;

(c) c_k 关于 $\|\underset{\sim}{x}_k\|$ 严格单调增, 进而, 不妨设 c_k 关于 $\|\underset{\sim}{x}_k\|$ 满足半强制条件,

$$\lim_{\|\underset{\sim}{x}_k\| \to +\infty} \frac{c_k(\underset{\sim}{x}_k, \underset{\sim}{y}_k(\omega))}{\|\underset{\sim}{x}_k\|} > 0, \quad \forall \underset{\sim}{y}_k(\omega), k = 1, 2, \cdots, K;$$

(d) 对于 $k = K, K-1, \cdots, 1$, 问题(1)以及问题(3)均为几乎处处严格可行.

文[1]证明了在上述条件下, 问题(1)—(3)不仅是适定的, 而且其各阶段子问题均可看作是含有随机参数的一般向量空间中的非线性凸规划问题 熟知, 对于凸规划问题, 对偶理论与最优性条件相当完善 这些理论不仅被成功地用于凸规划的理论研究, 而且还被广泛用于构造求解凸规划问题的各种有效算法 对于多阶段有补偿问题(1)—(3), 能否给出类似的对偶理论与最优性条件?因问题(1)—(3)由一系列子问题循环定义, 不具有通常规划问题那样单一的形式, 从而无法采用通常的研究方法来得出其对偶理论 文献[2], [3]等将某些特殊多阶段有补偿问题转化为等价的单阶段形式规划问题, 借助已有的对偶理论给出相应对偶理论 但由于所构造单阶段问题过于抽象和复杂, 使得所得结论形式虽然比较简明, 有关条件却不易检验, 无法直接应用, 且不存在统一的准则将多阶段有补偿问题转化为单阶段的形式 为克服上述缺点并给出一般多阶段有补偿问题(1)—(3)的最优性条件与对偶理论更合理的描述, 本文采用一种新的研究方法, 即首先推广与对偶理论有关的概念, 通常构造所论问题的广义鞍函数来导出原问题在等价意义下的广义原始泛函与相应的广义对偶泛函, 由此得到相应的对偶理论与最优性条件 与凸规划的对偶理论一样, 所得结论不仅能恰当, 合理地反映问题本身的属性, 而且所得定理形式简明、结论较强、可直接应用于多阶段有补偿问题的其它理论研究与算法设计中去 基于此, 本文结构如下: 第2节通过推广有关概念, 给出广义鞍函数与广义原始泛函等的定义, 构造相应的广义鞍函数; 第3节详细论证了由所构造的鞍函数导出的原始泛函与对偶泛函确实是补偿问题(1)—(3)在等价意义下的广义原始泛函与广义对偶泛函, 由此则可直接获得补偿问题的对偶定理与最优性条件 关于定理的描述及其应用我们放在第4节讨论

§2 概念的推广与广义鞍函数

因为多阶段有补偿问题(1)—(3)是通过一系列相互关联的子问题循环定义, 不具有通常数学规划问题的形式 通常所说的一个数学规划问题的鞍函数、原始问题与对偶问题等概念对

于问题(1)—(3)不再适用．因此，要在不改变该问题原有形式的基础上研究它的最优性条件与对偶理论，就必须对通常的概念及定义方式作必要的修改和推广，使之适用于补偿问题(1)—(3)，而其含义与作用应类似于相应的概念．为此，首先引入下列几个定义：

定义1　称一个泛函为等价于多阶段有补偿问题(1)—(3)的广义原始泛函，如果它以该多阶段有补偿问题各阶段的所有决策变量作为其变元，且该泛函的无约束或在变量非负约束下的全局极小解恰好就是原多阶段有补偿问题(1)—(3)的一个最优解．另外，该泛函还具有通常原始泛函的某些基本性质，如 l．sc．性、凸性等．

类似地可以给出广义对偶泛函的定义，由此则可定义等于多阶段补偿问题(1)—(3)的广义鞍函数为：

定义3　如果一个以上述广义原始泛函与广义对偶泛函的变量作为变量的“双重”多变元泛函不仅是一个满足极小-极大定理的恰当鞍函数，而且由它所导出的原始泛函与对偶泛函恰好是上述意义下多阶段有补偿问题(1)—(3)的广义原始泛函与广义对偶泛函．则称该泛函为多阶段有补偿问题(1)—(3)的广义鞍函数．

有了上述定义，则可在明确的意义下讨论问题(1)—(3)的最优性条件与对偶理论．

由文[1]的结论知，在条件(a)-(d)之下，各阶段子问题对其所含随机元的任意一个固定值均为关于 $\underset{\sim}{x}_k$ $(0\le k\le K)$ 的凸规划问题；而且对于几乎所有的 $\underset{\sim}{y}_k(\omega)$ $(1\le k\le K)$，各阶段子问题不仅有有限的最优值，并且存在达到该最优值的最优解．利用这些结论，则可由凸规划的对偶理论[4]得，对于 $1\le k\le K$，有

$$
\begin{aligned}
Q_k(\underset{\sim}{x}_{k-1}, \underset{\sim}{y}_k(\omega)) = & \max_{\lambda_k(\underset{\sim}{y}_k(\omega))\ge \underset{\sim}{0}_{J_k}} \inf_{x_k\ge\theta_k} [c_k(\underset{\sim}{x}_{k-1}, x_k; \underset{\sim}{y}_k(\omega)) \\
& + \overline{Q}_{k+1}(\underset{\sim}{x}_{k-1}, x_k; \underset{\sim}{y}_k(\omega)) + \sum_{j=1}^{J_k} \lambda_{kj}(\underset{\sim}{y}_k(\omega)) g_{kj}(\underset{\sim}{x}_{k-1}, x_k; \underset{\sim}{y}_k(\omega))] \\
= & \max_{\lambda_k(\underset{\sim}{y}_k(\omega))\ge \underset{\sim}{0}_{J_k}} \inf_{x_k\ge\theta_k} l_k(\underset{\sim}{x}_k, \lambda_k, \underset{\sim}{y}_k(\omega)),
\end{aligned}
\tag{4}
$$

其中 $l_k(\underset{\sim}{x}_k, \lambda_k, \underset{\sim}{y}_k(\omega))$ 为第 k 阶段子问题在常义下的 Lagrange 泛函，$\underset{\sim}{0}_{J_k}$ 表示空间 R^{J_k} 中的零元素，$\lambda_k(\underset{\sim}{y}_k(\omega)) = (\lambda_{k1}(\underset{\sim}{y}_k(\omega)), \cdots, \lambda_{kJ_k}(\underset{\sim}{y}_k(\omega)))^T$ 为 Lagrange 乘子向量，它们的值随 $\underset{\sim}{y}_k(\omega)$ 取值的不同而发生变化，是 $\underset{\sim}{y}_k(\omega)$ 的函数．

对 k 从 K 到1递推地利用(4)式，可得如下等式：

$$
\begin{aligned}
& EQ_1(x_0, y_1(\omega)) dF_{y_1}(y_1(\omega)) \\
= & \int \max_{\lambda_1(y_1(\omega))\ge \underset{\sim}{0}_{J_1}} \inf_{x_1\ge\theta_1} [c_1(\underset{\sim}{x}_1, y_1(\omega)) + \sum_{j=1}^{J_1} \lambda_{1j}(y_1(\omega)) g_{1j}(\underset{\sim}{x}_1, y_1(\omega)) \\
& + \int \max_{\lambda_2(\underset{\sim}{y}_2(\omega))\ge \underset{\sim}{0}_{J_2}} \inf_{x_2\ge\theta_2} [c_2(\underset{\sim}{x}_2, \underset{\sim}{y}_2(\omega)) + \sum_{j=1}^{J_2} \lambda_{2j}(\underset{\sim}{y}_2(\omega)) g_{2j}(\underset{\sim}{x}_2, \underset{\sim}{y}_2(\omega)) + \cdots \\
& + \int \max_{\lambda_K(\underset{\sim}{y}_K(\omega))\ge \underset{\sim}{0}_{J_k}} \inf_{x_K\ge\theta_K} [c_K(\underset{\sim}{x}_K, \underset{\sim}{y}_K(\omega)) + \sum_{j=1}^{J_K} \lambda_{Kj}(y_K(\omega)) g_{Kj}(\underset{\sim}{x}_K, \underset{\sim}{y}_K(\omega))] \\
& dF_{y_K|\underset{\sim}{y}_{K-1}}(y_K(\omega)|\underset{\sim}{y}_{K-1}(\omega))] dF_{y_{K-1}|\underset{\sim}{y}_{K-2}}(y_{K-1}(\omega)|\underset{\sim}{y}_{K-2}(\omega)) \cdots] dF_{y_1}(y_1(\omega)).
\end{aligned}
$$

代入第0阶段子问题(3)，并应用凸规划的对偶理论，可得第0阶段子问题的最优值为：

$$\max_{\lambda_0\geq 0_{J_0}}\inf_{x_0\geq\theta_0}\Big\{c_0(x_0)+\int\max_{\lambda_1(y_1(\omega))\geq 0_{J_1}}\inf_{x_1\geq\theta_1}\Big[c_1(\underline{x}_1,y_1(\omega))+\sum_{j=1}^{J_1}\lambda_{1j}(y_1(\omega))g_{1j}(\underline{x}_1,y_1(\omega))$$

$$+\int\cdots+\int\max_{\lambda_K(y_K(\omega))\geq 0_{J_k}}\inf_{x_K\geq\theta_K}\Big[c_K(\underline{x}_K,y_K(\omega))+\sum_{j=1}^{J_K}\lambda_{Kj}(y_K(\omega))g_{Kj}(\underline{x}_K,y_K(\omega))\Big]$$

$$dF_{y_K|\underline{y}_{K-1}}(y_K(\omega)|\underline{y}_{K-1}(\omega))\Big]dF_{y_{K-1}|\underline{y}_{K-2}}\cdots\Big]dF_{y_1}(y_1(\omega))+\sum_{j=1}^{J_0}\lambda_{0j}g_{0j}(x_0)\Big\}.$$

若将上面这个问题看作是递推定义的以 λ_0 与 x_0 为变元的max-min 问题, 则由凸规划的对偶理论知与 $\max\limits_{\lambda_0\geq 0_{J_0}}(\inf\limits_{x_0\geq\theta_0}\cdots)$ 的最优解 λ_0^* 相应的 $\inf\limits_{x_0\geq\theta_0}\cdots$ 的最优解即为第0阶段子问题的最优解, 并由此可递推地求出原多阶段有补偿问题(1)—(3)的最优解和相应的最优乘子. 另外, 如果能证明上式中取极大、极小与积分的顺序可交换, 则可将各个积分号内的max 与 inf 运算统一提到上式的开头来.

受上面推导的启发, 可以构造 $K+1$ 阶段有补偿问题(1)—(3)的广义Lagrange 函数为

$$L(\underline{x}_K,\underline{\lambda}_K)=L(x_0,x_1,\cdots,x_K;\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_k)=c_0(x_0)+\sum_{j=1}^{J_0}\lambda_{0j}g_{0j}(x_0)$$

$$+\sum_{k=1}^{K}\underbrace{\int\cdots\int}_{k\text{重}}\Big[c_k(\underline{x}_k,y_k(\omega))+\sum_{j=1}^{J_k}\lambda_{kj}(y_k(\omega))g_{kj}(\underline{x}_k,y_k(\omega))\Big]$$

$$dF_{y_k|\underline{y}_{k-1}}(y_k(\omega)|\underline{y}_{k-1}(\omega))\cdots dF_{y_2|y_1}(y_2(\omega)|y_1(\omega))dF_{y_1}(y_1(\omega)). \tag{5}$$

在下一节将会看到 $L(\underline{x}_K,\underline{\lambda}_K)$ 在等价意义下确实可作为多阶段有补偿问题的广义鞍函数. 下面先证 $L(\underline{x}_K,\underline{\lambda}_K)$ 为鞍函数且满足极小极大定理.

定理1 设多阶段有补偿问题(1)—(3)满足条件(a)-(d), 且对任意给定的 $\underline{x}_k$ 与 $\underline{\lambda}_k(y_k(\omega))\geq 0_{J_k}$, 第 k 阶段子问题的Lagrange 泛函 $l_k(\underline{x}_k,\lambda_k,y_k(\omega))$ 关于 $y_k(\omega)$ 的积分值均有限. 则 $L(\underline{x}_K,\underline{\lambda}_K)$ 满足极小-极大定理, 即有下列等式成立:

$$\max_{\substack{\lambda_k(y_k(\omega))\geq 0_{J_k}\\ k=0,1,2,\cdots,K}}\ \min_{\substack{x_k\geq\theta_k\\ k=0,1,\cdots,K}} L(\underline{x}_K,\underline{\lambda}_K)=\min_{\substack{x_k\geq\theta_k\\ k=0,1,\cdots,K}}\ \max_{\substack{\lambda_k(y_k(\omega))\geq 0_{J_k}\\ k=0,1,2,\cdots,K}} L(\underline{x}_K,\underline{\lambda}_K). \tag{6}$$

证明 因假设第 $k(1\leq k\leq K)$ 阶段子问题的Lagrange 泛函 $l_k(\cdot)$ 常义可积, 故(5)式中相应的积分关于 $\lambda_{kj}(y_k(\omega))(1\leq j\leq J_k)$ 必满足线性可加性[5], 那么, 由 $L(\underline{x}_K,\underline{\lambda}_K)$ 的定义知其关于 $\lambda_k(1\leq k\leq K)$ 为上半连续的凹泛函; 同时, 由条件(a)知(5)式中的每个泛函关于 $\underline{x}_k$ 均为恰当的lsc 凸泛函, 关于 $y_k(\omega)$ 均Borel 可测, 由各阶段子问题Lagrange 泛函的可积性以及条件(c), (d)所包含的各阶段子问题的严格可行性与半强制性等可推得(5)式中的各个被积函数均满足文[1]中引理1的条件, 从而知 $L(\underline{x}_K,\underline{\lambda}_K)$ 关于 $\underline{x}_K$ 为lsc 的凸泛函. 而 $L(\underline{x}_K,\underline{\lambda}_K)$ 的恰当性由所设条件是显然的. 故得 $L(\underline{x}_K,\underline{\lambda}_K)$ 为一恰当的闭鞍函数.

由假设条件, 对于任意的 $\underline{x}_{k-1}$ 及 $y_k(\omega)$, 第 $k(1\leq k\leq K)$ 阶段子问题均严格可行, 即至少存在一点 x_k^0(x_k^0 可能随着 $\underline{x}_{k-1}$ 与 $y_k(\omega)$ 的不同变化而发生变化)使得

$$g_{kj}(\underline{x}_{k-1},x_k^0,y_k(\omega))<0,\quad j=1,2,\cdots,J_k. \tag{7}$$

而条件(c)意味着补偿泛函 $c_k(\underline{x}_k,y_k(\omega))$ 对于任意固定的 $y_k(\omega)$ 关于 $\underline{x}_k$ 是凸的且满足半强制性条件. 因此, 若令:

$$\underline{x}_K^0 = (x_0^0, x_1^0, x_2^0, \cdots, x_K^0), \quad \underline{\lambda}_K^0 = (\underline{0}_{J_0}, \underline{0}_{J_1}, \cdots, \underline{0}_{J_K}),$$

这里的$x_k^0(0\leq k\leq K)$对于任意的$1\leq k\leq K$均满足(7)式.由此与(7)式以及$L(\underline{x}_K, \underline{\lambda}_K)$的定义式(5)知必有

$$\lim_{\substack{\|\underline{x}_K\|+\|\underline{\lambda}_K\|\to+\infty \\ \underline{x}_K\geq\prod_{i=0}^{K}\theta_i,\ \underline{\lambda}_K\geq\prod_{i=0}^{K}\underline{0}_{J_i}}} [L(\underline{x}_K^0, \underline{\lambda}_K) - L(\underline{x}_K, \underline{\lambda}_K^0)] = -\infty. \tag{8}$$

因R^{J_k}及$X^k(0\leq k\leq K)$均是自反的Banach空间,集合$\{\underline{x}_K \mid x_0\geq\theta_0, \cdots, x_K\geq\theta_K\}$与$\{\underline{\lambda}_K \mid \lambda_0\geq\underline{0}_{J_0}, \cdots, \lambda_K\geq\underline{0}_{J_k}\}$都是闭凸集.故由上述证明的$L(\underline{x}_K, \underline{\lambda}_K)$为恰当的闭鞍函数以及(8)式可得$L(\underline{x}_K, \underline{\lambda}_K)$必满足极小-极大等式[6],即(6)式成立.证毕.

§3 广义原始问题与广义对偶问题的论证

本节在定理1的假设下证明由$L(\underline{x}_K, \underline{\lambda}_K)$所导出的原始问题与对偶问题恰好分别为问题(1)—(3)在等价意义下的广义原始问题与广义对偶问题.为此先利用正规凸被积函数的性质证明下列引理.它表明了极小化运算、极大化运算与求积分之间顺序的可交换性.

引理2 设$x\in X$, $y(\omega)$为取值于Y中的随机元,X, Y为自反、可分的Banach空间.随机规划问题:

$$\begin{aligned} &\inf\quad c(x, y(\omega)), \\ &\text{s.t.}\quad g_i(x, y(\omega))\leq 0, \qquad i=1,2,\cdots,m, \\ &\qquad\quad x\geq\theta, \end{aligned} \tag{9}$$

满足条件(a)-(d),且其Lagrange函数关于$y(\omega)$的积分存在,则有下列等式成立:

$$\begin{aligned} &\inf_{x(y(\omega))\geq\theta}\ \sup_{\lambda(y(\omega))\geq\underline{0}} \int [c(x, y(\omega)) + \sum_{i=1}^m \lambda_i(y(\omega))g_i(x, y(\omega))]dF_y(y(\omega)) \\ &= \int \inf_{x(y(\omega))\geq\theta}\ \sup_{\lambda(y(\omega))\geq\underline{0}} [c(x, y(\omega)) + \sum_{i=1}^m \lambda_i(y(\omega))g_i(x, y(\omega))]dF_y(y(\omega)), \end{aligned} \tag{10}$$

其中θ, $\underline{0}$分别为X, R^m中的零元素,$x(y(\omega))$关于$y(\omega)$可测,$\lambda(y(\omega))=(\lambda_1(y(\omega)), \lambda_2(y(\omega)), \cdots, \lambda_m(y(\omega)))^T$, $\lambda_i(y(\omega))(1\leq i\leq m)$为$y(\omega)$的非负Borel可测泛函.

证明 由假设对于任意的x与$\lambda(y(\omega))$, (9)的Lagrange泛函关于$y(\omega)$的积分存在,故(10)式的左边恒有意义.而对于右边,显然有

$$\begin{aligned} &\sup_{\lambda(y(\omega))\geq\underline{0}} [c(x, y(\omega)) + \sum_{i=1}^m \lambda_i(y(\omega))g_i(x, y(\omega))] \\ &= \begin{cases} c(x, y(\omega)), & \text{若 } g_i(x, y(\omega))\leq 0,\ 1\leq i\leq m, \\ +\infty, & \text{否则} \end{cases} \end{aligned} \tag{11}$$

对固定的x, $y(\omega)$,上式左边关于$\lambda(y(\omega))$是线性的,故必存在最优解,且可选取其值使之关于$y(\omega)$ Borel可测.即总有某一$\lambda^*(y(\omega))\geq\underline{0}$使上式左边取极大值.故只须证:

$$\begin{aligned} &\inf_{x(y(\omega))\geq\theta}\ \max_{\lambda(y(\omega))\geq\underline{0}} \int [c(x, y(\omega)) + \sum_{i=1}^m \lambda_i(y(\omega))g_i(x, y(\omega))]dF_y(y(\omega)) \\ &= \int \inf_{x(y(\omega))\geq\theta}\ \max_{\lambda(y(\omega))\geq\underline{0}} [c(x, y(\omega)) + \sum_{i=1}^m \lambda_i(y(\omega))g_i(x, y(\omega))]dF_y(y(\omega)). \end{aligned}$$

由(11)式得:

$$\inf_{x(y(\omega))\geq\theta}\ \max_{\lambda(y(\omega))\geq 0}\ [c(x,y(\omega))+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(y(\omega))g_i(x,y(\omega))]\leq\inf_{x(y(\omega))\geq\theta}c(x,y(\omega)),$$

从而由条件(a),(b),(c)所隐含的 $c(x,y(\omega))$ 的性质知(10)式的右边也是有意义的

为书写简便,记问题(9)的Lagrange 泛函为:

$$L(x,\lambda(y(\omega)),y(\omega))=c(x,y(\omega))+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(y(\omega))g_i(x,y(\omega)).$$

先证明下列等式

$$\max_{\lambda(y(\omega))\geq 0}\int L(x,\lambda(y(\omega)),y(\omega))dF_y(y(\omega))$$
$$=\int\max_{\lambda(y(\omega))\geq 0}L(x,\lambda(y(\omega)),y(\omega))dF_y(y(\omega)).\tag{12}$$

首先总有

$$\int L(x,\lambda(y(\omega)),y(\omega))dF_y(y(\omega))\leq\int\max_{\lambda(y(\omega))\geq 0}L(x,\lambda(y(\omega)),y(\omega))dF_y(y(\omega)),$$

因上式对任意的 $\lambda(y(\omega))\geq 0$成立,且右边的值实际上已与 $\lambda(y(\omega))$ 无关,故必有

$$\max_{\lambda(y(\omega))\geq 0}\int L(x,\lambda(y(\omega)),y(\omega))dF_y(y(\omega))\leq\int\max_{\lambda(y(\omega))\geq 0}L(x,\lambda(y(\omega)),y(\omega))dF_y(y(\omega)).$$

另一方面,由于上面已证总可以找到某一 $\lambda^*(y(\omega))\geq 0$使得(11)式左边达到其关于 $\lambda(y(\omega))\geq 0$ 的极大值,所以有:

$$\int\max_{\lambda(y(\omega))\geq 0}L(x,\lambda(y(\omega)),y(\omega))dF_y(y(\omega))=\int L(x,\lambda^*(y(\omega)),y(\omega))dF_y(y(\omega))$$
$$\leq\max_{\lambda(y(\omega))\geq 0}\int L(x,\lambda(y(\omega)),y(\omega))dF_y(y(\omega)).$$

这两个不等式表明(12)式必成立,若令:

$$g(x,y(\omega))=\begin{cases}0, & \text{若 } x\geq\theta,\\ +\infty, & \text{否则},\end{cases}$$

则易知(10)式又等价于

$$\inf_{x(y(\omega))\in X}\{[\max_{\lambda(y(\omega))\geq 0}\int L(x,\lambda(y(\omega)),y(\omega))dF_y(y(\omega))]+g(x,y(\omega))\}$$
$$=\int\inf_{x(y(\omega))\in X}\ \max_{L(y(\omega))\geq 0}[L(x,\lambda(y(\omega)),y(\omega))+g(x,y(\omega))]dF_y(y(\omega)).$$

但由(11)式及 $g(x,y(\omega))$ 的定义知:

$$\max_{\lambda(y(\omega))\geq 0}[L(x,\lambda(y(\omega)),y(\omega))+g(x,y(\omega))]$$
$$=\begin{cases}c(x,y(\omega)), & \text{若 } g_i(x,y(\omega))\leq 0,\ 1\leq i\leq m,\ x\geq\theta,\\ +\infty, & \text{否则}\end{cases}\tag{13}$$

由 $c(x,y(\omega)),g_i(x,y(\omega))$ 都满足条件(a)-(d)不难推得它们均为正规凸的被积函数[7]. 由正规凸的被积函数的性质与(13)知泛函 $\max_{\lambda(y(\omega))\geq 0}[L(x,\lambda(y(\omega)),y(\omega))+g(x,y(\omega))]$ 也是正规凸的被积函数;又因假设泛函 $L(x,\lambda(y(\omega)),y(\omega))$ 关于 $y(\omega)$ 可积,故由条件(d)及(13)式知至少有一点 $x(y(\omega))$ 使得泛函 $\max_{\lambda(y(\omega))\geq 0}[L(x,\lambda(y(\omega)),y(\omega))+g(x,y(\omega))]$ 关于 $y(\omega)$ 的积分值有

限;而所有可测函数所构成的空间显然可分.综合这三点,则由正规凸的被积泛函的共轭性定理[7]知有下列等式成立:

$$\inf_{x(y(\omega))\in X}\int\max_{\lambda(y(\omega))\geq 0}[L(x,\lambda(y(\omega)),y(\omega))+g(x,y(\omega))]dF_y(y(\omega))$$

$$=\int\inf_{x(y(\omega))\in X}\max_{\lambda(y(\omega))\geq 0}[L(x,\lambda(y(\omega)),y(\omega))+g(x,y(\omega))]dF_y(y(\omega)).$$

再考虑到(12)式则可得下列等式:

$$\inf_{x(y(\omega))\in X}\max_{\lambda(y(\omega))\geq 0}\int[L(x,\lambda(y(\omega)),y(\omega))+g(x,y(\omega))]dF_y(y(\omega))$$

$$=\int\inf_{x(y(\omega))\in X}\max_{\lambda(y(\omega))\geq 0}[L(x,\lambda(y(\omega)),y(\omega))+g(x,y(\omega))]dF_y(y(\omega))$$

$$=\int\inf_{x(y(\omega))\geq\theta}\max_{\lambda(y(\omega))\geq 0}L(x,\lambda(y(\omega)),y(\omega))dF_y(y(\omega)),\tag{14}$$

但因泛函 $g(x,y(\omega))$ 的取值与 $\lambda(y(\omega))$ 及 $y(\omega)$ 的取值以及它们的变化无关,因此有

$$\inf_{x(y(\omega))\in X}\max_{\lambda(y(\omega))\geq 0}\int[L(x,\lambda(y(\omega)),y(\omega))+g(x,y(\omega))]dF_y(y(\omega))$$

$$=\inf_{x(y(\omega))\in X}\{[\max_{\lambda(y(\omega))\geq 0}\int L(x,\lambda(y(\omega)),y(\omega))dF_y(y(\omega))]+g(x,y(\omega))\}$$

$$=\inf_{x(y(\omega))\geq\theta}\max_{\lambda(y(\omega))\geq 0}\int L(x,\lambda(y(\omega)),y(\omega))dF_y(y(\omega)).$$

由(14)与上式即可得到等式(10)必定成立 □

有了引理2的结论,则可按如下方式推导出补偿问题(1)—(3)的广义原始泛函 令:

$$F(x_k)=\max_{\substack{\lambda_k(y_k(\omega))\geq 0_{J_k}\\ k=0,1,2,\cdots,K}}L(x_K,\lambda_K)=\max_{\substack{\lambda_k(y_k(\omega))\geq 0_{J_k}\\ k=0,1,\cdots,K}}\{c_0(x_0)+\sum_{j=1}^{J_0}\lambda_{0j}g_{0j}(x_0)$$

$$+\sum_{k=1}^{K}\underbrace{\int\cdots\int}_{k\text{重}}[c_k(x_k,y_k(\omega))+\sum_{j=1}^{J_k}\lambda_{kj}(y_k(\omega))g_{kj}(x_k,y_k(\omega))]$$

$$dF_{y_k|y_{k-1}}(y_k(\omega)|y_{k-1}(\omega))\cdots dF_{y_2|y_1}(y_2(\omega)|y_1(\omega))dF_{y_1}(y_1(\omega))\}$$

$$=\max_{\substack{\lambda_k(y_k(\omega))\geq 0_{J_k}\\ k=0,1,\cdots,K}}\{c_0(x_0)+\sum_{j=1}^{J_0}\lambda_{0j}g_{0j}(x_0)$$

$$+\int[c_1(x_1,y_1(\omega))+\sum_{j=1}^{J_1}\lambda_{1j}(y_1(\omega))g_{1j}(x_1,y_1(\omega))$$

$$+\int[c_2(x_2,y_2(\omega))+\sum_{j=1}^{J_2}\lambda_{2j}(y_2(\omega))g_{2j}(x_2,y_2(\omega))+\int\cdots$$

$$+\int[c_K(x_K,y_K(\omega))+\sum_{j=1}^{J_K}\lambda_{Kj}(y_K(\omega))g_{Kj}(x_K,y_K(\omega))$$

$$dF_{y_K|y_{K-1}}(y_K(\omega)|y_{K-1}(\omega))]dF_{y_{K-1}|y_{K-2}}(y_{K-1}(\omega)|y_{K-2}(\omega))]\cdots]dF_{y_1}(y_1(\omega))\}.$$

由各阶段子问题常义Lagrange 函数的可积性与条件(a),(b)等可知上述将关于 $y_k(\omega)$ $(1\leq k$

$\le K$)的重积分变为关于 $y_k(\omega)$ 的累次积分是成立的

反复利用引理2中关于求极大与求积分顺序的可交换性, 以及 $L(\underset{\sim}{x}_K, \underset{\sim}{\lambda}_K)$ 的表达式中关于 $\lambda_k(y_k(\omega))$ 的可分离性, 则可得到 $F(\underset{\sim}{x}_K)$ 的如下表示式:

$$
\begin{aligned}
F(\underset{\sim}{x}_K) = & \max_{\lambda_0 \ge \underset{\sim}{0}_{J_0}} \{c_0(x_0) + \sum_{j=1}^{J_0} \lambda_{0j} g_{0j}(x_0)\} \\
& + \int [\max_{\lambda_1(y_1(\omega)) \ge \underset{\sim}{0}_{J_1}} \{c_1(\underset{\sim}{x}_1, y_1(\omega)) + \sum_{j=1}^{J_1} \lambda_{1j}(y_1(\omega)) g_{1j}(\underset{\sim}{x}_1, y_1(\omega))\} + \int [\cdots \\
& + \int \max_{\lambda_K(\underset{\sim}{y}_K(\omega)) \ge \underset{\sim}{0}_{J_K}} [c_K(\underset{\sim}{x}_K, \underset{\sim}{y}_K(\omega)) + \sum_{j=1}^{J_K} \lambda_{Kj}(\underset{\sim}{y}_K(\omega)) g_{Kj}(\underset{\sim}{x}_K, \underset{\sim}{y}_K(\omega))] \\
& dF_{y_K | \underset{\sim}{y}_{K-1}}(y_K(\omega) | \underset{\sim}{y}_{K-1}(\omega))]\cdots] dF_{y_2|y_1}(y_2(\omega) | y_1(\omega))] dF_{y_1}(y_1(\omega)).
\end{aligned}
$$

下面证明 $F(\underset{\sim}{x}_K)$ 即为补偿问题(1)—(3)在等价意义下的广义原始问题 由文[8]中定理2的结论可知, 以下所有关于 $x_k(1 \le k \le K)$ 的极小化运算只须在那些关于 $y_k(\omega)$ 为Borel 可测的所有 x_k 中进行, 没有必要在一切 x_k 中进行. 如只须进行 $\min\limits_{x_k(\underset{\sim}{y}_k(\omega)) \ge \theta_k}$ 运算, 而不必进行 $\min\limits_{x_k \ge \theta_k}$ 运算. 但为了书写简便, 以下将略去 $y_k(\omega)$, 即仍用后一种写法 反复应用引理2的结论, 再考虑到 $L(\underset{\sim}{x}_K, \underset{\sim}{\lambda}_K)$, 从而 $F(\underset{\sim}{x}_K)$ 的表达式中各个泛函关于变量 $x_k(0 \le k \le K)$ 的因果关系(nonanticipativity)[9]则可得

$$
\begin{aligned}
\min_{\substack{x_k \ge \theta_k \\ k=0,1,\cdots,K}} F(\underset{\sim}{x}_K) = & \min_{x_0 \ge \theta_0} [\max_{\lambda_0 \ge \underset{\sim}{0}_{J_0}} \{c_0(x_0) + \sum_{j=1}^{J_0} \lambda_{0j} g_{0j}(x_0)\} \\
& + \int \min_{x_1 \ge \theta_1} [\max_{\lambda_1(y_1(\omega)) \ge \underset{\sim}{0}_{J_1}} \{c_1(\underset{\sim}{x}_1, y_1(\omega)) + \sum_{j=1}^{J_1} \lambda_{1j}(y_1(\omega)) g_{1j}(\underset{\sim}{x}_1, y_1(\omega))\} + \int \min [\cdots \\
& + \int \min_{x_K \ge \theta_K} \max_{\lambda_K(\underset{\sim}{y}_K(\omega)) \ge \underset{\sim}{0}_{J_K}} \{c_K(\underset{\sim}{x}_K, \underset{\sim}{y}_K(\omega)) + \sum_{j=1}^{J_K} \lambda_{Kj}(\underset{\sim}{y}_K(\omega)) g_{Kj}(\underset{\sim}{x}_K, \underset{\sim}{y}_K(\omega))\} \\
& dF_{y_K | \underset{\sim}{y}_{K-1}}(y_K(\omega) | \underset{\sim}{y}_{K-1}(\omega))] dF_{y_{K-1} | \underset{\sim}{y}_{K-2}}(y_{K-1}(\omega) | \underset{\sim}{y}_{K-2}(\omega))]\cdots] dF_{y_1}(y_1(\omega))] \\
= & \min_{x_0 \ge \theta_0} \max_{\lambda_0 \ge \underset{\sim}{0}_{J_0}} [c_0(x_0) + \sum_{j=1}^{J_0} \lambda_{0j} g_{0j}(x_0) \qquad (15) \\
& + \int \min_{x_1 \ge \theta_1} \max_{\lambda_1(y_1(\omega)) \ge \underset{\sim}{0}_{J_1}} [c_1(\underset{\sim}{x}_1, y_1(\omega)) + \sum_{j=1}^{J_1} \lambda_{1j}(y_1(\omega)) g_{1j}(\underset{\sim}{x}_1, y_1(\omega)) + \int \min \max [\cdots \\
& + \int \min_{x_K \ge \theta_K} \max_{\lambda_K(\underset{\sim}{y}_K(\omega)) \ge \underset{\sim}{0}_{J_K}} [c_K(\underset{\sim}{x}_K, \underset{\sim}{y}_K(\omega)) + \sum_{j=1}^{J_K} \lambda_{Kj}(\underset{\sim}{y}_K(\omega)) g_{Kj}(\underset{\sim}{x}_K, \underset{\sim}{y}_K(\omega))] \cdot \\
& dF_{y_K | \underset{\sim}{y}_{K-1}}(y_K(\omega) | \underset{\sim}{y}_{K-1}(\omega))] dF_{y_{K-1} | \underset{\sim}{y}_{K-2}}(y_{K-1}(\omega) | \underset{\sim}{y}_{K-2}(\omega))]\cdots] dF_{y_1}(y_1(\omega))].
\end{aligned}
$$

上述第二等号后将运算 $\min\limits_{x_k \ge \theta_K}$ 与运算 $\max\limits_{\lambda_k(\underset{\sim}{y}_k(\omega)) \ge \underset{\sim}{0}_{J_k}}$ $(0 \le k \le K)$ 放在一起, 作用于紧接在 $\min\limits_{x_k \ge \theta_K}$ $\max\limits_{\lambda_k(\underset{\sim}{y}_k(\omega)) \ge \underset{\sim}{0}_{J_k}}$ 之后所对应的一对中括号内的所有项, 这可由含有 $\lambda_{kj}(y_k(\omega))$ $(j=1, \cdots, J_k)$ 的项与所有含有 $x_{k'}(k+1 \le k' \le K)$ 的函数项之间的可分离性与独立性(即它们均与 $\lambda_k(y_k(\omega))$ 无关)

立即推得. 关于问题(15), 有如下定理成立.

定理3 设多阶段有补偿问题(1)—(3)满足定理1的条件, 则极小化问题(15)的最优解 x_K^* 必为该多阶段有补偿问题的最优解. 因此, $F(x_K)$ 即是多阶段有补偿问题(1)—(3)在等价意义下的广义原始泛函.

证明 由于假设问题(1)—(3)满足条件(d), 因此, 对于任意给定的 $y_K(\omega)$ 及 $x_0, x_1, \cdots, x_{K-1}$, 第 K 阶段子问题必严格可行, 即至少存在一个可行内点, 从而由条件(a), (b), (c)及凸规划问题的对偶理论知[4,6]泛函:

$$\max_{\lambda_K(y_K(\omega))\geq 0_{J_K}} \left[c_K(x_K, y_K(\omega)) + \sum_{j=1}^{J_K} \lambda_{Kj}(y_K(\omega)) g_{Kj}(x_K, y_K(\omega))\right],$$

即是第 K 阶段子问题的原始泛函, 且下列极小化问题:

$$\min_{x_K\geq\theta_K} \max_{\lambda_K(y_K(\omega))\geq 0_{J_K}} \left[c_K(x_K, y_K(\omega)) + \sum_{j=1}^{J_K} \lambda_{Kj}(y_K(\omega)) g_{Kj}(x_K, y_K(\omega))\right]$$

的最优解即是该阶段子问题相应的最优解 $x_K(x_0, x_1, \cdots, x_{K-1}, y_K(\omega))$ (由所给条件(a)-(d)知该最优解必存在); 而这个极小化问题的最优值就等于该阶段子问题相应的最优值 $Q_k(x_{K-1}, y_K(\omega))$. 从而由 $k=K$ 时的等式(2)知问题(15)可表示为

$$\begin{aligned}
\min_{\substack{x_k\geq\theta_k\\ k=0,1,\cdots,K-1}} F(x_{K-1}) = {} & \min_{x_0\geq\theta_0} \max_{\lambda_0\geq 0_{J_K}} \left[c_0(x_0) + \sum_{j=1}^{J_0} \lambda_{0j} g_{0j}(x_0)\right. \\
& + \int \min_{x_1\geq\theta_1} \max_{\lambda_1(y_1(\omega))\geq 0_{J_1}} \left[c_1(x_1, y_1(\omega)) + \sum_{j=1}^{J_1} \lambda_{1j}(y_1(\omega)) g_{1j}(x_1, y_1(\omega)) + \int\cdots\right. \\
& + \int \min_{x_{K-1}\geq\theta_{K-1}} \max_{\lambda_{K-1}(y_{K-1}(\omega))\geq 0_{J_{K-1}}} \left[c_{K-1}(x_{K-1}, y_{K-1}(\omega)) + \overline{Q}_K(x_{K-1}, y_{K-1}(\omega))\right. \\
& \left. + \sum_{j=1}^{J_{K-1}} \lambda_{K-1j}(y_{K-1}(\omega)) g_{K-1j}(x_{K-1}, y_{K-1}(\omega))\right] \cdot \\
& dF_{y_{K-1}|y_{K-2}}(y_{K-1}(\omega) | y_{K-2}(\omega))\cdots\left.\right] dF_{y_1}(y_1(\omega))\left.\right].
\end{aligned}$$

因 $c_{K-1}(x_{K-1}, y_{K-1}(\omega)) + \overline{Q}_k(x_{K-1}, y_{K-1}(\omega))$ 为给定 $y_{K-1}(\omega)$ 及 $x_0, x_1, \cdots, x_{K-2}$ 时第 $K-1$ 阶段子问题的目标函数, 故由条件(a)-(d), 类似第 K 阶段时的推理可知

$$\begin{aligned}
\max_{\lambda_{K-1}(y_{K-1}(\omega))\geq 0_{J_{K-1}}} & \left[c_{K-1}(x_{K-1}, y_{K-1}(\omega)) + \overline{Q}_K(x_{K-1}, y_{K-1}(\omega))\right. \\
& \left. + \sum_{j=1}^{J_{K-1}} \lambda_{K-1j}(y_{K-1}(\omega)) g_{K-1j}(x_{K-1}, y_{K-1}(\omega))\right]
\end{aligned}$$

必为第 $K-1$ 阶段子问题的原始泛函, 且下列极小化问题的最优解就是第 $K-1$ 阶段子问题的最优解 $x_{K-1}(x_0, x_1, \cdots, x_{K-2}, y_{K-1}(\omega))$:

$$\begin{aligned}
\min_{x_{K-1}\geq\theta_{K-1}} \Bigg[\max_{\lambda_{K-1}(y_{K-1}(\omega))\geq 0_{J_{K-1}}} & \left[c_{K-1}(x_{K-1}, y_{K-1}(\omega)) + \overline{Q}_K(x_{K-1}, y_{K-1}(\omega))\right. \\
& \left. + \sum_{j=1}^{J_{K-1}} \lambda_{K-1j}(y_{K-1}(\omega)) g_{K-1j}(x_{K-1}, y_{K-1}(\omega))\right]\Bigg].
\end{aligned}$$

而第 $K-1$ 阶段子问题的最优值 $Q_{K-1}(x_{K-2}, y_{K-2}(\omega))$ 也等于该极小化问题的最优值

对 $K, K-1, \cdots, 1$ 及第0阶段子问题重复利用上述论证过程知问题(15)的最优解必为补偿问题(1)—(3)的最优解. 因当递推到 $k=0$ 时, 极小化问题(15)取如下形式

$$\min_{x_0 \geq \theta_0} \left[\max_{\lambda_0 \geq 0_{J_0}} \left\{ c_0(x_0) + \int Q_1(x_0, y_1(\omega)) dF_{y_1}(y_1(\omega)) + \sum_{j=1}^{J_0} \lambda_{0j} g_{0j}(x_0) \right\} \right]. \tag{16}$$

利用所给条件及凸规划问题的对偶理论, 用完全相同的方法证得: 问题(16)的最优解必为第0阶段子问题的最优解 x_0^*, 最优值即等于第0阶段子问题的最优值.

上面的证明表明对于任一 k: $1 \leq k \leq K$, 对任意给定的 $\underline{x}_{k-1}$ 以及 $y_k(\omega)$, 问题(15)所得的解的分量 $x_k(x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, y_k(\omega))$ 即是此时对应的第 k 阶段子问题的最优解. 而(16)式又表明在极小化问题(15)时所得最优解的第0阶段分量 x_0^* 即为第0阶段子问题的最优解. 这就表明问题(15)的最优解取形式:

$$\underline{x}_K^* = [x_0^*, x_1^*(x_0^*, y_1(\omega)), x_2^*(x_0^*, x_1^*, y_2(\omega)), \cdots, x_K^*(x_0^*, x_1^*, \cdots, x_{K-1}^*, y_K(\omega))]^T$$

由多阶段有补偿问题最优解的定义知 $\underline{x}_k^*$ 即为多阶段有补偿问题(1)—(3)的最优解.

最后, 由定理1的证明过程知, 在所给条件下, 对于任给的 $\underline{\lambda}_K$, $L(\underline{x}_K, \underline{\lambda}_K)$ 关于 $\underline{x}_K$ 为 l. s.c. 凸函数, 从 $F(\underline{x}_K)$ 的定义式可知, 作为在一族凸函数中取最大形成的函数, 其结果还是关于 $\underline{x}_K$ 为凸的泛函; 而其作为一族 l. s.c. 泛函的上包络, 所得泛函仍为 l. s.c. 泛函. 故 $F(\underline{x}_K)$ 关于 $\underline{x}_K$ 为 l. s.c. 的凸泛函, 而其恰当性由所给假设条件是显然的.

综合以上结论知, 由(15)式所定义的泛函 $F(\underline{x}_K)$ 必是多阶段有补偿问题(1)—(3)在等价意义下的广义原始泛函, 而极小化问题(15)即是对应的广义原始问题. □

由定理1关于鞍函数 $L(\underline{x}_K, \underline{\lambda}_K)$ 的结论和定理3的证明过程中所得的泛函 $F(\underline{x}_K)$ 的一些基本性质知, 如果定义:

$$G(\underline{\lambda}_K) = \min_{\substack{x_K \geq \theta_K \\ k=0,1,\cdots,K}} L(\underline{x}_K, \underline{\lambda}_K), \tag{17}$$

则 $G(\underline{\lambda}_K)$ 必然是多阶段有补偿问题(1)—(3)在等价意义下的广义对偶泛函. 即下列问题:

$$\max_{\substack{\lambda_k(y_k(\omega)) \geq 0_{J_k} \\ k=0,1,\cdots,K}} G(\underline{\lambda}_K)$$

的最优解 $\underline{\lambda}_K^*$ 必为补偿问题(1)—(3)的相应于某个最优解的最优 Lagrange 乘子.

因论证过程与定理3类似, 即应用凸规划的对偶理论, $L(\underline{x}_K, \underline{\lambda}_K)$ 的结构特点与引理2等, 这里不再给出详细的论证. 此外, 还可以证明 $G(\underline{\lambda}_K)$ 是上半连续的凹函数.

§4 对偶定理与最优性条件及其应用

利用前一节所得的关于广义原始泛函 $F(\underline{x}_K)$ 与广义对偶泛函 $G(\underline{\lambda}_K)$ 的有关结论与定理1, 可直接获得关于多阶段有补偿问题(1)—(3)的对偶定理与最优性条件. 具体地说, 有下列的定理成立:

定理4(对偶定理) 设定理1的条件都得到满足, 则对于由 $L(\underline{x}_K, \underline{\lambda}_K)$ 所导出的多阶段有补偿问题(1)—(3)的广义原始泛函与广义对偶泛函, 有下列等式成立:

$$\min_{\substack{x_k \geq \theta_k \\ k=0,1,\cdots K}} F(\underline{x}_K) = \max_{\substack{\lambda_k(y_k(\omega)) \geq 0_{J_k} \\ k=0,1,\cdots,K}} G(\underline{\lambda}_K). \tag{18}$$

由(6)式和广义原始泛函与广义对偶泛函的定义式知该定理的结论成立.

定理5(最优性条件) 如果定理1的所有条件均满足,则 x_K^* 为补偿问题(1)—(3)最优解的充要条件是存在某一 $\lambda_K^* \geq \prod_{i=0}^{k} 0_{J_i}$,使得 (x_K^*, λ_K^*) 为鞍泛函 $L(x_K, \lambda_K)$ 的一个鞍点,即有

$$L(x_K^*, \lambda_K) \leq L(x_K^*, \lambda_K^*) \leq L(x_K, \lambda_K^*), \text{对} \forall x_K \geq \prod_{k=0}^{K} \theta_k, \lambda_K(y_K(\omega)) \geq \prod_{k=0}^{K} 0_{J_K}. \tag{19}$$

因为定理3表明多阶段有补偿问题的最优解 x_K^* 也就是广义原始问题(15)的最优解. 而由广义原始泛函的定义,定理1的结论以及一个泛函满足极小-极大等式的充要条件是它具有鞍点等结论,可以得知定理5成立.

由本文的结论并结合实际中多阶段有补偿问题(1)—(3)的具体特点,可构造出求解该补偿问题的各种对偶型算法. 因为由定理4与定理5的结论可知:要想求得补偿问题(1)—(3)的最优解,只须找到凸-凹泛函 $L(x_K, \lambda_K)$ 的鞍点即可. 关于对偶型算法的具体实现与实施方案,可参见[10],这里不再详述.

这类算法的优点在于:只须求解一个极小化问题,则可找到多阶段有补偿问题的近似最优解或最优解,而不象通常直接基于原多阶段有补偿问题模型的算法(参见[11]及其中之参考文献等)那样必须通过求解多个相互关联的极小化问题才能得到所要求解补偿问题的一个近似最优解. 且各个子问题均为有约束的.

参 考 文 献

[1] 陈志平,徐成贤,多阶段有补偿问题的非线性模型,纯粹数学与应用数学,Vol. 9,增刊3(1993),20—29.

[2] M. J. Eisner, P. Olsen, *Duality for stochastic programming interpreted as L. P. in Lp-space*, SIAM J. Appl. Math., 28: 4(1975), 779-792.

[3] R. T. Rockafellar, R. J.-B. Wets, *Measures as Lagrange multipliers in multistage stochastic programming*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 60: 2(1977), 301-313.

[4] D. G. Luenberger, *Optimization by Vector Space Methods*, John Wiley & Sons Inc., 1969.

[5] D. W. Walkup, J. B. Wets Roger, *Stochastic programs with recourse*, SIAM J. Appl. Math., 15: 5(1967), 1299-1314.

[6] V. Barbu, Th. Precupanu, *Convexity and Optimization in Banach Space*, Romania International Publishes, Bucuresti, 1978.

[7] C. Castaing, M. Valabier, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Springer-Verlag, Berling, New York, 1977.

[8] 游兆永,徐成贤,陈志平,非线性随机参数规划问题的稳定性分析,运筹与决策,Vol. 2, 1556-1567,成都科技大学出版社,1992, 10.

[9] R. T. Rockafellar, R. J. B. Wets, *Nonanticipativity and L^1-martingales in stochastic optimization problems*, Math. Prog. Study, 6(1976), 170-187.

[10] 游兆永,徐成贤,陈志平,多阶段有补偿问题的对偶并行算法,

[11] Y. Ermoliev, R. J. B. Wets, ed., *Numerical Techniques in Stochastic Programming*, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

Generalized Duality Theory on the General Multistage Recourse Problem

Chen Zhiping *Xu Chengxian*
(Dept. of Math., Xi'an Jiaotong University, 710049)

Abstract

The gerneralized duality theory and optimality condition of general multistage nonlinear stochastic programming with recourse is discussed in this paper. The meaning of concepts relevant to duality theories of usual programming problems is extended through exploring the essence of duality theories about convex programming, the generalized primal, dual functions of the discussed problem in the equivalent sense is then constructed and the corresponding duality theory is drived. The obtained results not only reflect properties of the problem itself properly and reasonably, but also describe the relative theorems concisely with strong conclusions, which can be directly and concretely applied to the study of other theoretical problems of multistage problem with recourse and the designing of their numerical solving algorithms

Keywords multistage problem with recourse, stochastic programming, generalized saddle point theorem, convex analysis