第17卷第3期 数学研究与评论 Vol. 17 No. 3
1997年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1997

丛空间 $RP(\xi^{k+1})$ 的协边类的群结构*

吕 志
(清华大学应用数学系, 北京100084)

周春莲 刘喜波
(装甲兵工程学院, 北京100072) (河北科学大学, 石家庄050054)

摘 要 在本篇文章中, 当 $k=n, n-1, n-2, n-3$ 时, 决定了由丛空间 $RP(\xi^{k+1})$ 的未定向协边类所构成的群结构

关键词 群结构, 丛空间, Stong 流形, 示性类
分类号 AMS(1991) 57R/CCL O189.3

§1 引 言

设 $\eta_{n-k}(BO(k+1))$ 是 $n-k$ 维光滑闭流形 V^{n-k} 上的实 $k+1$ 维向量丛 ξ^{k+1} 所构成的未定向协边群, η_n 是 n 维未定向的 Thom 协边群. 定义 $\sigma_n^k: \eta_{n-k}(BO(k+1)) \to \eta_n$ 为一同态, 约定每个 $k+1$ 维实向量丛 $\xi^{k+1} \to V^{n-k}$ 的未定向协边类对应着 $RP(\xi^{k+1})$ 的未定向协边类. 易知 $\mathrm{Im}\,\sigma_n^k$ 为 η_n 的子群, $\mathrm{Im}\,\sigma_*^k = \sum_{n\geq k} \mathrm{Im}\,\sigma_n^k$ 为多项式代数 $\eta_* = \sum_{n\geq 0} \eta_n$ 的理想. 在协边理论中, 对 $\mathrm{Im}\,\sigma_n^k$ 的研究有着重要的意义. 当 $k \leq 7$ 时, 问题已解决(见文[2], [3], [4], [5]). 可是, 随着 k 的增大, 问题变得更复杂. 本文引入一种计算方法, 决定了 $\mathrm{Im}\,\sigma_n^k (k=n, n-1, n-2, n-3)$ 的群结构. 全文均在模2整数加群 Z_2 上讨论. $RP(l)$ 表示 l 维实射影空间, $W_i(M^n)$ 表示 n 维光滑闭流形 M^n 的第 i 个 Stiefel-Whitney 示性类. $[M^n]$ 表示 M^n 的未定向协边类. 记 $\omega = (i_1, \cdots, i_r)$, $|\omega| = i_1 + \cdots + i_r$, $W_\omega(M^n)$ 表示 M^n 的示性类, $W_\omega[M^n]$ 表示 M^n 的示性数.

§2 预 备

设 V^{n-k} 是 $n-k$ 维光滑闭流形, $\xi^{k+1} \to V^{n-k}$ 是实 $k+1$ 维向量丛, $RP(\xi^{k+1}) \xrightarrow{p} V^{n-k}$ 是与之联系的射影丛. 由[6]知, $H^*(RP(\xi^{k+1}); Z_2)$ 是以 $1, c, \cdots, c^k$ 为基的自由 $H^*(V^{n-k}; Z_2)$-模, 其中 $c = W_1(\lambda)$, $\lambda \to RP(\xi^{k+1})$ 为典范线丛, 并且 $RP(\xi^{k+1})$ 的 Stiefel-Whitney 示性全类为

$$W(RP(\xi^{k+1})) = W(V^{n-k})((1+c)^{k+1} + v_1(1+c)^k + \cdots + v_k(1+c) + v_{k+1}), \quad (1)$$

* 1994年12月19日收到. 清华大学青年基金资助项目.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

其中 $c^{k+1}+v_1c^k+\cdots+v_kc+v_{k+1}=0, v_i=W_i(\xi^{k+1}), i=1,\cdots,k+1$. 设 $\beta\in H^*(V^{n-k};Z_2)$, 则有

$$\beta c^i[RP(\xi^{k+1})]=\begin{cases}0, & 若\ i<k,\\ \overline{W}_{i-k}\beta[V^{n-k}], & 若\ i\geq k,\end{cases}\tag{2}$$

其中 $\overline{W}$ 表示由 $W(\xi^{k+1})\overline{W}(\xi^{k+1})=1$ 决定的对偶示性类

命题 2.1 若 $\alpha\in \operatorname{Im}\sigma_n^{2m+1}$, 则 $W_\omega\alpha=0$, 其中 $\omega=(2i_1+1,\cdots,2i_s+1,2j_1,\cdots,2j_t)$, $|\omega|\leq s+2m$.

证明 设 $\alpha=[RP(\xi^{2m+2})]$. 由(1)式知, 当 $i\geq 1$ 时, 有 $W_i(RP(\xi^{2m+2}))=\sum_j\beta_jc^{k_j}$, $\beta_j\in H^{t_j}(V^{n-2m-1},Z_2)$, $t_j\geq 1$. 在上式中, 特别地, 当 i 为奇时, 必有 $k_j\leq i-1$(因 $(1+c)^{2m+2}$ 中无 c^{2h+1} 项, 其中 $0\leq 2h<2m+1$). 因此, 有下式

$$W_\omega(RP(\xi^{2m+2}))=W_{2i_1+1}\cdots W_{2i_s+1}W_{2j_1}\cdots W_{2j_t}(RP(\xi^{2m+2}))=\sum\beta c^\theta,$$

其中一定有 θ 满足 $\theta\leq 2i_1+\cdots+2i_s+2j_1+\cdots+2j_t=|\omega|-s$. 再根据(2)式, 当 $\theta\leq|\omega|-s\leq 2m$ 时, 可得 $W_\omega\alpha=0$. □

设 $FN(l)$ 表示正整数 l 中所含 2 的因子个数. 例如, $FN(2^h)=h$, $FN(2k+1)=0$. 易知 $FN(\ )$ 具有如下一些性质:

(Ⅰ) 若 $\binom{p+1}{q+1}\equiv 0 \bmod 2$, $\binom{p}{q}\equiv 1 \bmod 2$, 则 $FN(p+1)>FN(q+1)$; 若 $\binom{p+1}{q+1}\equiv 1 \bmod 2$, 则 $FN(p+1)\leq FN(q+1)$; 若 $\binom{p+1}{q+1}\equiv\binom{p}{q}\equiv 1 \bmod 2$, 则 $FN(p+1)=FN(q+1)$; 若 $FN(p+1)=FN(q+1)$, 则 $\binom{p+1}{q+1}\equiv\binom{p}{q} \bmod 2$(注意这里使用公式 $\binom{p+1}{q+1}=\frac{p+1}{q+1}\binom{p}{q}$).

(Ⅱ) 若 $FN(l_i)\geq FN(l)$, $i\in N$(自然数集), 则 $FN(l_1+l_2+\cdots)\geq FN(l)$.

(Ⅲ) 若 $FN(l_i)\geq FN(l_1+\cdots+l_t)$, $i=1,\cdots,t$, 则 $\{l_i;\ i=1,\cdots,t\}$ 中必有奇数个项, 其所含 2 的因子个数等于 $FN(l_1+\cdots+l_t)$.

(Ⅳ) $\{l_i;\ i=1,\cdots,t\}$ 中至多有偶数个项, 其所含 2 的因子个数小于 $FN(l_1+\cdots+l_t)$.

设 $(n_1,\cdots,n_{k+1})$ 是一组非负整数,

$$\lambda_i\to RP(n_1)\times\cdots\times RP(n_i)\times\cdots\times RP(n_{k+1})$$

是第 i 个因子上典范线丛的导出丛

$$p: RP(n_1,\cdots,n_{k+1})\to RP(n_1)\times\cdots\times RP(n_{k+1})$$

是由 $\lambda_1\oplus\cdots\oplus\lambda_{k+1}$ 所决定的射影空间丛, 其维数为 $n=n_1+\cdots+n_{k+1}+k$. 由文[2]知

$$W(RP(n_1,\cdots,n_{k+1}))=\prod_{i=1}^{k+1}(1+a_i)^{n_i+1}(1+a_i+c)$$

其中 $a_i=W_1(\lambda)$, $i=1,\cdots,k+1$, c 为 $RP(n_1,\cdots,n_{k+1})$ 上典范线丛的第一个 Stiefel-Whitney 类, 且满足关系 $(a_1+c)\cdots(a_{k+1}+c)=0$. $RP(n_1,\cdots,n_{k+1})$ 在 η_n 中为不可分解元的充要条件为 $\sum_{i=1}^{k+1}\binom{n-1}{n_i}\equiv 1 \bmod 2$. 又从文[7]知 $a_1^{r_1}\cdots a_{k+1}^{r_{k+1}}c^{n-r_1-\cdots-r_{k+1}}\neq 0\Leftrightarrow r_i\leq n_i(i=1,\cdots,k+1)$.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

由文[1]知, $\sum \operatorname{Im}\sigma_n^k$ 作为 η_* 中的理想, 当 $k < n$ 时, 可由 Stong 流形 $RP(n_1, \cdots, n_{k+1})$ 生成, 因此有

引理 2.2 若 $\alpha \in \operatorname{Im}\sigma_n^k (k < n)$, 则有

$$\alpha = \sum_{j+n_1+\cdots+n_{k+1}+k=n} [M^j][RP(n_1, \cdots, n_{k+1})], \text{ 其中 } [M^j] \in \eta_*.$$

§3 $k = n$ 时的情形

定理 3.1 (i) $\operatorname{Im}\sigma_{2m+1}^{2m+1} = \{0\}$ (平凡子群); (ii) $\{[RP(2m)]\}$ 为 $\operatorname{Im}\sigma_{2m}^{2m}$ 的一组可加基底, 即有 $\operatorname{Im}\sigma_{2m}^{2m} = \{\epsilon[RP(2m)] \mid \epsilon \in \mathbf{Z}_2\}$.

证明 设 $\alpha \in \operatorname{Im}\sigma_{2m+1}^{2m+1}$. 由命题 2.1 可得

$$W_{(2i_1+1, \cdots, 2i_s+1, 2j_1, \cdots, 2j_t)}\alpha = 0, \text{ 其中 } s \geq 1$$

当 $s = 0$ 时, 因 $\dim\alpha = 2m + 1$ 为奇, 显然有 $W_{(2j_1, \cdots, 2j_t)}\alpha = 0$. 故 $\alpha = 0$. 定理(i) 获证.

设 $\beta = [RP(\xi^{2m+1})] \in \operatorname{Im}\sigma_{2m}^{2m}$ 且 $\beta \neq 0$, 考虑

$$RP(2m) \to RP(\xi^{2m+1}) \to V^0,$$

由文[2, 命题 8.5], 易知 $\beta = [RP(\xi^{2m+1})] = [RP(2m)]$. 故定理(ii) 得证. □

§4 $k = n - 1$ 时的情形

引理 4.1 $[RP(1, \underbrace{0, \cdots, 0}_{n-1})] = 0$.

证明 利用 $W(RP(1, \underbrace{0, \cdots, 0}_{n-1})) = (1 + a + c)(1 + c)^{n-1}$, 其中 $a^2 = 0, c^n + ac^{n-1} = 0$. 考虑如下:

(Ⅰ) 当 $n = 2m + 1$ 时, 可有 $W_{2i+1}(RP((1, \underbrace{0, \cdots, 0}_{2m})) = (a + c)c^{2i}\binom{m}{i}$, $W_{2j}(RP((1, \underbrace{0, \cdots, 0}_{2m})) = c^{2j}\binom{m}{j}$. 注意此时 $\dim RP((1, \underbrace{0, \cdots, 0}_{2m}) = 2m + 1$ 为奇, 故当 $s = 0$ 或为偶时, 显然有 $W_\omega[RP(1, \underbrace{0, \cdots, 0}_{2m})] = 0$, 其中 $\omega = (2i_1 + 1, \cdots, 2i_s + 1, 2j_1, \cdots, 2j_t)$. 当 s 为奇时, 由 $a^2 = 0$ 及 $c^{2m+1} + ac^{2m} = 0$, 易知 $W_\omega[RP(1, \underbrace{0, \cdots, 0}_{2m})] = 0$, 故可得 $[RP(1, \underbrace{0, \cdots, 0}_{2m})] = 0$.

(Ⅱ) 当 $n = 2m + 2$ 时, 知 $[RP(1, \underbrace{0, \cdots, 0}_{2m+1})] \in \operatorname{Im}\sigma_{2m+2}^{2m+1}$. 根据命题 2.1, 得 $W_\omega[RP(1, \underbrace{0, \cdots, 0}_{2m+1})] = 0$, 其中 $\omega = (2i_1 + 1, \cdots, 2i_s + 1, 2j_1, \cdots, 2j_t)$ 及 $s \geq 2$. 当 $s = 1$ 时, 因为 $\dim[RP(1, \underbrace{0, \cdots, 0}_{2m+1})] = 2m + 2$ 为偶, 显然有 $W_\omega[RP(1, \underbrace{0, \cdots, 0}_{2m+1})] = 0$. 故只需考虑 $s = 0$ 时的情形. 直接计算可知

$$W_{(2j_1, \cdots, 2j_t)}(RP(1, \underbrace{0, \cdots, 0}_{2m+1})) = c^{(2j_1-1)+\cdots+(2j_t-1)}\prod_{h=1}^{t}\left(\binom{m+1}{j_h}c + a\binom{m}{j_h-1}\right).$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

分如下三种情况讨论:

1° 当$\left\{\binom{m+1}{j_h};\ h=1,\cdots,t\right\}$中至少有两个为 0 时, 显然可得

$$W_{(2j_1,\cdots,2j_t)}[\mathrm{RP}(1,\underbrace{0,\cdots,0}_{2m+1})]=0.$$

2° 当$\left\{\binom{m+1}{j_h};\ h=1,\cdots,t\right\}$中仅有一个为 0 时, 不妨设$\binom{m+1}{j_1}=0$, 则一定有$\binom{m}{j_1-1}=0$. 若否, 即$\binom{m}{j_1-1}=1$, 利用 FN( ) 的性质, 可知 FN$(m+1)>$ FN(j_1), 以及 FN$(m+1)\leq$ FN(j_r) $(r=2,\cdots,t)$. 再由$m+1=j_1+\cdots+j_t$, 推出 FN$(m+1-(j_2+\cdots+j_t))=$ FN$(j_1)<$ FN$(m+1)$ 以及 FN$(m+1-(j_2+\cdots+j_t))\geq$ FN$(m+1)$. 显然矛盾. 故有$\binom{m}{j_1-1}=0$. 因此可得

$$W_{(2j_1,\cdots,2j_t)}[\mathrm{RP}(1,\underbrace{0,\cdots,0}_{2m+1})]=0.$$

3° 当$\left\{\binom{m+1}{j_h};\ h=1,\cdots,t\right\}$中均为 1 时, 可得 FN$(m+1)\leq$ FN(j_h), $h=1,\cdots,t$. 再由$m+1=j_1+\cdots+j_t$, 可知$\{j_h: h=1,\cdots,t\}$中必有奇数个项, 其所含 2 的因子个数等于 FN$(m+1)$, 这蕴含着$\left\{\binom{m}{j_h-1};\ h=1,\cdots,t\right\}$中有奇数个等于 1. 易知有

$$W_{(2j_1,\cdots,2j_t)}[\mathrm{RP}(1,\underbrace{0,\cdots,0}_{2m+1})]=0.$$

综上所述, 得$[\mathrm{RP}(1,\underbrace{0,\cdots,0}_{n-1})]=0$. □

定理 4.2 $\mathrm{Im}\,\sigma_n^{n-1}=\{0\}$.

证明 设$\alpha\in\mathrm{Im}\,\sigma_n^{n-1}$, 利用引理 2.2, 有$\alpha=\epsilon[\mathrm{RP}(1,\underbrace{0,\cdots,0}_{n-1})]$, $\epsilon\in\mathbf{Z}_2$. 再由引理 4.1 知$\alpha=0$. □

§5 $k=n-2$ 时的情形

同引理 4.1 证明方法一样, 可得

引理 5.1 $[\mathrm{RP}(1,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{2m})]=0$, $[\mathrm{RP}(2,\underbrace{0,\cdots,0}_{4m+1})]=0$.

定理 5.2 (i) $\mathrm{Im}\,\sigma_{4m+3}^{4m+1}=\{0\}$; (ii) $\{[\mathrm{RP}(2,\underbrace{0,\cdots,0}_{4m+3})]\}$ 为 $\mathrm{Im}\,\sigma_{4m+5}^{4m+3}$ 的一组可加基底; (iii) $\{[\mathrm{RP}(2,\underbrace{0,\cdots,0}_{2m})],[\mathrm{RP}(1,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{2m-1})]\}$ 为 $\mathrm{Im}\,\sigma_{2m+2}^{2m}$ 的一组可加基底.

证明 设$\alpha\in\mathrm{Im}\,\sigma_n^{n-2}$. 利用引理 2.2 及定理 4.2, 有$\alpha=\epsilon_1[\mathrm{RP}(2,\underbrace{0,\cdots,0}_{n-2})]+\epsilon_2[\mathrm{RP}(1,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{n-3})]$, $\epsilon_i\in\mathbf{Z}_2$, $i=1,2$. 直接计算可知$S_{4m+5}[\mathrm{RP}(2,\underbrace{0,\cdots,0}_{4m+3})]=1$, 再由引理 5.1, 得(i),

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

(ii) 成立. 为了证明(iii), 需证$[RP(2,\underbrace{0,\cdots,0}_{2m})]$, $[RP(1,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{2m-1})]$是线性独立的. 令

$$l_1[RP(2,\underbrace{0,\cdots,0}_{2m})]+l_2[RP(1,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{2m-1})]=0,\ l_i\in\mathbf{Z}_2,\ i=1,2.$$

通过计算可得

(a) 当$m=2h$时, $S_{4h+2}[RP(2,\underbrace{0,\cdots,0}_{4h})]=0$, 但有$W_1^{4h+2}[RP(2,\underbrace{0,\cdots,0}_{4h})]=1$, 知$[RP(2,\underbrace{0,\cdots,0}_{4h})]$为可分解的非零元. $S_{4h+2}[RP(1,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{4h-1})]=1$, 知$[RP(1,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{4h-1})]$为不可分解元.

(b) 当$m=2h+1$时, $S_{4h+4}[RP(2,\underbrace{0,\cdots,0}_{4h+2})]=S_{4h+4}[RP(1,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{4h+1})]=1$, 但

$$W_4W_{4h}[RP(2,\underbrace{0,\cdots,0}_{4h+2})]=0,\ W_4W_{4h}[RP(1,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{4h+1})]=1.$$

从(a), (b)中可得$l_i=0$, $i=1,2$. 故(iii)成立. □

§6 $k=n-3$时的情形

利用引理4.1的证明方法及命题2.1, 可得

引理6.1 $[RP(3,\underbrace{0,\cdots,0}_{2m})]=[RP(1,1,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{2m-2})]=0$, $[RP(1,1,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{4m+1})]=0$, $[RP(3,\underbrace{0,\cdots,0}_{8m+1})]=0$.

在上文讨论中, 可以用引理4.1的方法证明Stong流形协边于零. 同样的方法也可以证明两个Stong流形是协边的.

引理6.2 $[RP(3,\underbrace{0,\cdots,0}_{2m+1})]=[RP(2,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{2m})]$; $[RP(3,\underbrace{0,\cdots,0}_{8m+5})]=[RP(1,1,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{8m+3})]$.

证明 令$\alpha=[RP(3,\underbrace{0,\cdots,0}_{2m+1})]$, $\beta=[RP(2,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{2m})]$. 由$W(RP(3,\underbrace{0,\cdots,0}_{2m+1}))=(1+a+(ac+c^2))(1+c)^{2m}$, $a^4=0$以及$W(RP(2,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{2m}))=(1+a_1)^3(1+a_1+c)(1+a_2+c)(1+c)^{2m}$, $a_1^3=0$, $a_2^2=0$, 对于$W_\omega=W_{(2i_1+1,\cdots,2i_s+1,2j_1,\cdots,2j_t)}$, 有

$$W_\omega(RP(3,\underbrace{0,\cdots,0}_{2m+1}))=a^s c^{2\sum_{x=1}^{s}i_x+2\sum_{y=1}^{t}j_y-t}\prod_{x=1}^{s}\binom{m}{i_x}\prod_{y=1}^{t}\left(\binom{m+1}{j_y}c+a\binom{m}{j_y-1}\right),$$

$$W_\omega(RP(2,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{2m}))=\prod_{x=1}^{s}\left(a_2c^{2i_x}\binom{m}{i_x}+(a_1^2c+a_1a_2c+a_1c^2)c^{2i_x-2}\binom{m}{i_x-1}\right)\times$$
$$\prod_{y=1}^{t}\left(c^{2j_y-3}\binom{m+1}{j_y}c^3+(a_1c^2+a_2c^2)\binom{m}{j_y-1}+(a_1^2a_2+a_1^2c)\binom{m}{j_y-2}\right).$$

因$\alpha,\beta\in\mathrm{Im}\,\sigma_{2m+4}^{2m+1}$, 利用命题2.1, 当$s\geq4$时, 有$W_\omega\alpha=W_\omega\beta=0$. 当$s=1,3$时, 显然有$W_\omega\alpha=W_\omega\beta=0$. 故只需讨论$s=0,2$时的情形.

(Ⅰ) 当$s=2$, $t\geq1$时

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

1° 当 $\binom{m}{i_1}=\binom{m}{i_2}=0$ 时，显然有 $W_{\alpha}\alpha=0$. 对 β 如下考虑：(i) 当 $\left\{\binom{m+1}{j_y};y=1,\cdots,t\right\}$ 中至少有一个为 0 时，易知 $W_{\omega}\beta=0$；(ii) 当 $\binom{m+1}{j_y}=1,y=1,\cdots,t$ 时，若 $\binom{m}{i_1-1},\binom{m}{i_2-1}$ 至少有一个为 0 时，显然 $W_{\omega}\beta=0$；若 $\binom{m}{i_1-1}=\binom{m}{i_2-1}=1$，则 $\left\{\binom{m}{j_y-1};y=1,\cdots,t\right\}$ 中必有奇数个为 1（同引理 4.1 中 3° 一样情形），易知此时 $W_{\omega}\beta=0$.

2° 当 $\binom{m}{i_1}\neq\binom{m}{i_2}$ 时，不妨设 $\binom{m}{i_1}=0,\binom{m}{i_2}=1$. 显然有 $W_{\alpha}\alpha=0$. 考虑 β 如下：(i) 当 $\binom{m}{i_1-1}=0$ 时，显然有 $W_{\omega}\beta=0$. (ii) 当 $\binom{m}{i_1-1}=1$ 且 $\left\{\binom{m+1}{j_y};y=1,\cdots,t\right\}$ 中至少有一个为 0 时，易知 $W_{\omega}\beta=0$. (iii) 当 $\binom{m}{i_1-1}=\binom{m+1}{j_y}(y=1,\cdots,t)=1$ 时，则必有 $\binom{m}{i_2-1}=0$. 因 $\binom{m+1}{i_1}=\binom{m}{i_1-1}=1$，故 $FN(m+1)=FN(i_1)$. 又 $FN(m+1)\leq FN(j_y)(y=1,\cdots,t)$，由 $i_2=m+1-(i_1+j_1+\cdots+j_t)$ 可知 $FN(m+1)\leq FN(i_2)$. 若 $FN(i_2)=FN(m+1)$，可得 $\binom{m+1}{i_2}=\binom{m}{i_2-1}$，推出 $\binom{m}{i_2}=0\neq1$ 矛盾. 故只有 $FN(m+1)<FN(i_2)$，即 $\binom{m}{i_2-1}=0$. 由此知 $W_{\omega}\beta=0$.

3° 当 $\binom{m}{i_1}=\binom{m}{i_2}=1$ 时，分如下情形：(i) 当 $\binom{m+1}{i_1}=\binom{m+1}{i_2}=1$ 时，即 $\binom{m}{i_1-1}=\binom{m}{i_2-1}=0$. 显然 $W_{\omega}\beta=0$. 对 α 考虑如下：(a) 当 $\left\{\binom{m+1}{j_y};y=1,\cdots,t\right\}$ 至少有一个为 0 时，易知 $W_{\alpha}\alpha=0$. (b) 当 $\binom{m+1}{j_y}=1(y=1,\cdots,t)$ 时，则有 $\left\{\binom{m}{j_y-1};y=1,\cdots,t\right\}$ 中有奇数个等于 1（同引理 4.1(3°) 一样讨论，注意利用 $\binom{m}{i_1-1}=\binom{m}{i_2-1}=0$），易有 $W_{\alpha}\alpha=0$. (ii) 当 $\binom{m+1}{i_1}\neq\binom{m+1}{i_2}$ 时，不妨设 $\binom{m+1}{i_1}=0,\binom{m+1}{i_2}=1$. 讨论如下：(a) 当 $\left\{\binom{m+1}{j_y};y=1,\cdots,t\right\}$ 中至少有两个为 0 时，显然 $W_{\alpha}\alpha=W_{\omega}\beta=0$. (b) 当 $\left\{\binom{m+1}{j_y};y=1,\cdots,t\right\}$ 中仅有一个为 0 时，不妨设 $\binom{m+1}{j_1}=0$. 若 $\binom{m}{j_1-1}=0$，易知 $W_{\alpha}\alpha=W_{\omega}\beta=0$；若 $\binom{m}{j_1-1}=1$，则可得 $W_{\alpha}\alpha=W_{\omega}\beta=1$. (c) 当 $\binom{m+1}{j_y}=1(y=1,\cdots,t)$ 时，此种情形不存在. 因 $\binom{m+1}{i_2}=1$，由 $i_1=m+1-(i_2+j_1+\cdots+j_t)$ 可得 $FN(m+1)\leq FN(i_1)$. 又因 $\binom{m+1}{i_1}=0,\binom{m}{i_1-1}=1$，知 $FN(m+1)>FN(i_1)$ 矛盾. (iii) 当 $\binom{m+1}{i_1}=$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$\binom{m+1}{i_2}=0$, 即 $\binom{m}{i_1-1}=\binom{m}{i_2-1}=1$. 考虑如下: (a) 当 $\left\{\binom{m+1}{j_y};y=1,\cdots t\right\}$ 中至少有一个为 0 时, 易知 $W_\omega\alpha=W_\omega\beta=0$. (b) 当 $\binom{m+1}{j_y}=1(y=1,\cdots,t)$ 时. 若 $\left\{\binom{m}{j_y-1};y=1,\cdots,t\right\}$ 中有奇数个为 1 时, 易知 $W_\omega\alpha=W_\omega\beta=0$; 若 $\left\{\binom{m}{j_y-1};y=1,\cdots,t\right\}$ 中有偶数个为 1 时, 易有 $W_\omega\alpha=W_\omega\beta=1$.

(Ⅱ) 当 $s=2,t=0$ 时, 易有

1° 当 $\binom{m}{i_1},\binom{m}{i_2}$ 至少有一个为 0 时, 则有 $W_\omega\alpha=W_\omega\beta=0$. 此时不存在 $\binom{m}{i_1-1}=\binom{m}{i_2-1}=1$ 的情形. 2° 当 $\binom{m}{i_1}=\binom{m}{i_2}=1$ 时, 则有 $W_\omega\alpha=W_\omega\beta=1$. 注意此时不存在 $\binom{m+1}{i_1}\neq\binom{m+1}{i_2}$ 和 $\binom{m+1}{i_1}=\binom{m+1}{i_2}=1$ 的情形.

综合(Ⅰ), (Ⅱ) 的结果可得, 当 $s=2$ 时, 有 $W_\omega(\alpha+\beta)=0$; 当 $s=0$ 时, 同上述讨论方法一样, 有 $W_\omega(\alpha+\beta)=0$. 故 $\alpha=\beta$. 同样的方法, 可以证明 $[RP(3,\underbrace{0,\cdots,0}_{8m+5})]=[RP(1,1,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{8m+3})]$.

从引理 6.1, 6.2 可得

推论 6.3 $[RP(2,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{8m})]=0$, $[RP(2,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{8m+4})]=[RP(1,1,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{8m+3})]$.

定理 6.4 (i) $\{[RP(2,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{2m-1})]\}$ 为 $\operatorname{Im}\sigma_{2m+3}^{2m}$ 的一组可加基底, 其中 $m\geq 1$; (ii) $\{[RP(3,\underbrace{0,\cdots,0}_{4m+3})]\}$ 为 $\operatorname{Im}\sigma_{4m+6}^{4m+3}$ 的一组可加基底; (iii) $\{[RP(1,1,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{4m-1})]\}$ 为 $\operatorname{Im}\sigma_{4m+4}^{4m+1}$ 的一组可加基底, 其中 $m\geq 1$.

证明 设 $\alpha\in\operatorname{Im}\sigma_n^{n-3}$, 利用引理 2.2, 定理 4.2 及 $\eta_1=\{0\}$, 则有

$$\alpha=\epsilon_1[RP(3,\underbrace{0,\cdots,0}_{n-3})]+\epsilon_2[RP(2,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{n-4})]+\epsilon_3[RP(1,1,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{n-5})],$$

其中 $\epsilon_i\in\mathbf{Z}_2$, $i=1,2,3$. 根据引理 6.1, 6.2 及推论 6.3, 有

1° 当 $n=2m+3(m\geq 1)$ 时, $\alpha=\epsilon_2[RP(2,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{2m-1})]$. 直接计算可得, 当 $m=2h+1$ 时, $S_{4h+5}[RP(2,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{4h+1})]=1$; 当 $m=2h$ 时, $S_{4h+3}[RP(2,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{4h-1})]=0$, 但有 $W_1^{4h-2}S_5[RP(2,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{4h-1})]=1$, 知 $[RP(2,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{4h-1})]$ 为可分解的非零元. 故定理(i) 成立.

2° 当 $n=4m+6$ 时, $\alpha=\epsilon_1[RP(3,\underbrace{0,\cdots,0}_{4m+3})]$. 直接计算有 $S_{4m+6}[RP(3,\underbrace{0,\cdots,0}_{4m+3})]=1$, 知 $[RP(3,\underbrace{0,\cdots,0}_{4m+3})]$ 为不可分解元. 故定理(ii) 成立.

3° 当 $n=4m+4$ 时 $(m\geq 1)$, 有 $\alpha=\epsilon_3'[RP(1,1,1,\underbrace{0,\cdots,0}_{4m-1})]$. 直接计算有 $S_{4m+4}[RP(1,$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$1, 1, \underbrace{0, \cdots, 0}_{4m-1}] = 0$, 但有 $w_2^{2m+2}[RP(1, 1, 1, \underbrace{0, \cdots, 0}_{4m-1})] = 1$, 可知 $[RP(1, 1, 1, \underbrace{0, \cdots, 0}_{4m-1})]$ 为可分解的非零元 故定理(iii) 成立 □

注 因 $\mathrm{Im}\,\sigma_3^0 \subset \eta_8 = \{0\}$, 得 $\mathrm{Im}\,\sigma_3^0 = \{0\}$, 又 $\mathrm{Im}\,\sigma_4^1 = \{0\}$, 故此 $\mathrm{Im}\,\sigma_n^{n-3}$ 的群结构完全决定

致谢: 对吴振德、刘宗泽两位教授的大力支持和鼓励表示衷心的感谢.

参 考 文 献

[1] P. E. Conner, *Differentiable periodic maps*, 2nd, ed, Lecture Notes in Math., Vol. 738, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1979.

[2] R. E. Stong, *On fibering of cobordism classes*, Trans. Amer. Math. Soc., 178(1973), 431-447.

[3] F. L. Capobianco, *Cobordism classes represented by fibering with* RP(2k+1), Mich. Math. J., 24(1977), 185-192.

[4] 王彦英, 关于以RP(2k)为纤维的丛空间的协边类, 数学学报, 31(1988), 158—163.

[5] 杨华建, 流形的未定向协边类有表示RP(ξ^8)的充要条件, 数学年刊, 10A(5), 11989, 524-528.

[6] C. Kosniowski and R. E. Stong, *Involutions and characteristic numbers*, Topology, 17(1978), 309-330.

[7] 岳清奇, 具有常余维数的对合的流形, 中国科学, A 辑, 5(1992), 486-489.

The Group Sturcture of the Unoriented Bordism of Bundle Space RP(ξ^{k+1})

Lü Zhi

(Dept. of Appl. Math., Tsinghua University, Beijing 100084)

Zhou Chunlian

(Armored Force Engineering Institute, Beijing 100072)

Liu Xibo

(Hebei University of Sci. and Tech., Shijiazhuang 050054)

Abstract

In this paper, when $k = n, n-1, n-2, n-3$, we determine the group structure formed by the unoriented bordism class of bundle space RP(ξ^{k+1}).

Keywords group structure, bundle space, stong manifold, characteristic class

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.