第17卷第3期 数学研究与评论 Vol.17 No.3
1997年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1997

一个Maslov指标公式及应用*

卢广存
(南开大学南开数学研究所, 天津300071)

摘要 本文给出辛流形(M,ω)和$(M,-\omega)$的乘积辛流形$(M\times M,\omega\oplus(-\omega))$中Lagrange子流形$\Delta_M:=\{(x,x)\mid x\in M\}$的Maslov指标的计算公式,并讨论它的一些应用.

关键词 Maslov指标,Lagrange子流形,单调辛流形
分类号 AMS(1991) 58F05, 58E09/CCL O189.3

设(M,ω)是一个辛流形,L是它的一个Lagrange子流形.定义Maslov指标同态

$$I_{\mu,L}:\pi_2(M,L)\to Z$$

如下:设$\alpha\in\pi_2(M,L)$,任取它的一个光滑代表元,$v:(D^2,\partial D^2)\to(M,L)$.那么精确到同伦辛向量从$v^*TM\to D^2$有唯一辛平凡化

$$D^2\times R^{2n}\to v^*TM:(z,\zeta)\mapsto\Phi(z)\zeta\in T_{v(z)}M,$$

这给出(R^{2n},ω_0)中所有Lagrange子空间集$\Lambda(n)$中一条回路.这条回路在$\pi_1(\Lambda(n))=H_1(\Lambda(n),Z)$中对应元记为$\partial v$.设$\mu\in H^1(\Lambda(n),Z)$是万有Maslov类(见[1]).则定义$I_{\mu,L}(\alpha)=\mu(\partial v)\in Z$.

这个定义的下述具体表示在计算中是方便的.设$L_0=\{(x,y)\in R^{2n}:y=0\}$.因对每个$z\in\partial D^2=S^1$,$\Phi(z)^{-1}T_{v(z)}L$是$(R^{2n},\omega_0)$中一个Lagrange子空间.人们可取辛矩阵回路

$$S^1\to SP(2n;R),z\mapsto A(z)$$

使$A(z)L_0=\Phi(z)^{-1}T_{v(z)}L$, $\forall z\in S^1$.从正交辛矩阵

$$(A(z)^TA(z))^{-1/2}A(z)=\begin{pmatrix}X(z)&-Y(z)\\Y(z)&X(z)\end{pmatrix}$$

知$X(z)+iY(z)$是酉阵.现在映射

$$S^1\to S^1,z\mapsto\det(X(z)+iY(z))^2$$

的Brouwer度就等于$I_{\mu,L}(v)$.

在[3]中,D. McDuff和D. Salamon给出了相对Maslov类的公理化定义.如$(E,\omega)\to D^2$是$2n$维辛向量从,$F\to\partial D^2$是它限制到∂D^2的Lagrange子丛.按刚才办法利用辛平凡化

$$D^2\times R^{2n}\to E,(z,\zeta)\to\Phi(z)\zeta\in E_z$$

定义Lagrange回路$S^1\to\Lambda(n),z\mapsto\Phi(z)^{-1}F_z$的Maslov指标,记它为$\mu(E,F)=\mu_\omega(E,F)$.按这个记号$I_{\mu,L}(v)=\mu(v^*TM,v^*TL)$.

* 1994年12月5日收到

写 $\mathbf{J}(M,\omega)$ 为 M 上与 ω 相容近复结构全体. 这个空间可收缩, 故复向量丛 (TM, J) 的第一陈类不依赖于 $J\in\mathbf{J}(M,\omega)$ 的选取, 记为 $c_1(M)=c_1(M,\omega)$. 本文主要结果是

定理 设 (M,ω) 是辛流形, Δ_M 是乘积辛流形 $(M\times M, \omega\oplus(-\omega))$ 的(对角线) Lagrange 子流形. 则对任一光滑映射 $v:(D^2,\partial D^2)\to(M\times M,\Delta_M)$

$$I_{\mu,\Delta_M}(v)=2c_1(M)(\tilde{v}), \tag{1}$$

这里 $\tilde{v}: S^2=D^2\cup\overline{D}^2\to M$, $\tilde{v}(z)=v_1(z)$, $z\in D^2$ 并且 $\tilde{v}(z)=v_2(z)$, $z\in\overline{D}^2$, $v=(v_1,v_2)$, $\overline{D}^2$ 是与 D^2 上方向相反的圆盘.

为了证明这个定理, 先给出两个引理.

引理1[7] 设 L 是辛流形 (M,ω) 的 Lagrange 子流形. 光滑映射 $w, w':(D^2,\partial D^2)\to(M,L)$ 满足 $w|_{\partial D^2}=w'|_{\partial D^2}$. 令 $u:S^2=D^2\cup\overline{D}^2\to M$, $u(z)=w(z)$, $z\in D^2$, $u(z)=w'(z)$, $z\in\overline{D}^2$, 则

$$I_{\mu,L}(w)-I_{\mu,L}(w')=2c_1(M)(u).$$

引理2 设 $(E,\omega)\to D^2$ 是一个辛向量丛, $F\to\partial D^2$ 是它在 ∂D^2 上限制的 Lagrange 子丛, 则

$$\mu_{-\omega}(E,F)=-\mu_\omega(E,F).$$

证明 取 $J\in\mathbf{J}(M,\omega)$ 使 $J_zF_z\cap F_z=\{0\}$, $\forall z\in\partial D^2$. 利用 E 上黎曼度量 $g_J(\zeta,\eta)=\omega(\zeta, J\eta)$ 人们能找 (E,ω) 的一个辛正交平凡化

$$D^2\times\mathbb{R}^{2n}\to(E,\omega),\ (z,\zeta)\mapsto\Phi(z)\zeta$$

使在 ∂D^2 上 $\Phi(z)^{-1}F_z=L_0\Psi(z)$, 这里

$$\Psi(z)=\begin{pmatrix}X(z) & -Y(z)\\ Y(z) & X(z)\end{pmatrix}$$

是正交辛矩阵. 设 $A:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^{2n}$ 是由矩阵

$$\begin{pmatrix}0 & I_n\\ I_n & 0\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}0 & I_n\\ I_n & 0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & I_n\\ I_n & 0\end{pmatrix}$$

确定的线性变换, 则 $A^*\omega_0=-\omega_0$ 并有 $(E,-\omega)$ 的辛正交平凡化

$$D^2\times\mathbb{R}^{2n}\to(E,-\omega),\ (z,\zeta)\mapsto\Phi(z)A\zeta$$

因为

$$(\Phi(z)A)^{-1}F_z=A^{-1}\Phi(z)^{-1}F_z=L_0\begin{pmatrix}Y(z) & -X(z)\\ X(z) & Y(z)\end{pmatrix}$$

及 $\mu_\omega(E,F)$, $\mu_{-\omega}(E,F)$ 分别为映射 $S^1\to S^1$, $z\mapsto\det(X(z)+iY(z))^2$ 和 $S^1\to S^1$, $z\mapsto\det(Y(z)+iX(z))^2=(-1)^n\overline{\det(X(z)+iY(z))}$ 的 Brouwer 度, 可知引理成立. □

定理的证明 取光滑映射

$$v=(v_1,v_2),\ v'=(v_2,v_1):(D^2,\partial D^2)\to(M\times M,\Delta_M).$$

令

$$\tilde{v}_1(z)=\begin{cases}v_1(z), z\in D^2,\\ v_2(z), z\in\overline{D}^2;\end{cases}\qquad \tilde{v}_2(z)=\begin{cases}v_2(z), z\in D^2,\\ v_1(z), z\in\overline{D}^2\end{cases}$$

和 $\tilde{v}(z)=(\tilde{v}_1(z),\tilde{v}_2(z))$, $\tilde{v}'(z)=(\tilde{v}_2(z),\tilde{v}_1(z))$. 由引理1得

$$I_{\mu,\Delta_M}(v)-I_{\mu,\Delta_M}(v')=2c_1(M\times M,\omega\oplus(-\omega))(\tilde{v}). \tag{2}$$

另一方面, 由引理2及前面讨论不难得到

$$
\begin{aligned}
I_{\mu,\Delta_M}(v') &= \mu_{(v')^*(\omega\oplus-\omega)}((v')^*T(M\times M),(v')^*T\Delta_M)\\
&= -\mu_{(v')^*((-\omega)\oplus\omega)}((v')^*T(M\times M),(v')^*T\Delta_M)\\
&= -\mu_{v^*(\omega\oplus(-\omega))}(v^*T(M\times M),v^*T\Delta_M)\\
&= -I_{\mu,\Delta_M}(v).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

从陈类的性质

$$c_1(M\times M,\omega\oplus(-\omega)) = \pi_1^*c_1(M,\omega)-\pi_2^*c_1(M,\omega),$$

这里 π_1,π_2 分别为 $M\times M$ 到第一因子及第二因子的投影. 有

$$c_1(M\times M,\omega\oplus(-\omega))(\tilde{v}) = c_1(M,\omega)(\tilde{v}_1)-c_1(M,\omega)(\tilde{v}_2) = 2c_1(M,\omega)(\tilde{v}_1).$$

结合这与(2), (3)一起就证明了定理 □

下面考虑定理的应用, 在辛几何中人们常常把辛流形上辛映射的研究转换成乘积辛流形中它的图象研究. 这个图象是一个 Lagrange 子流形. 利用定理中公式可把施加在辛映射及辛流形 (M,ω) 的一些条件转换成施加在图象 Lagrange 子流形上一些条件.

对辛流形 (M,ω) 及它的 Lagrange 子流形 L, 考虑同态

$$
\begin{aligned}
&I_{\mu,L}:\pi_2(M,L)\to\mathbb{Z},\quad I_{\mu,L}(v) = \mu(\partial v),\\
&I_\omega:\pi_2(M,L)\to\mathbb{R},\quad I_\omega(v) = \int_{D^2}v^*\omega,\\
&I_{c_1}:\pi_2(M)\to\mathbb{Z},\quad I_\omega(u) = c_1(M)((u)),\\
&\hat{I}_\omega:\pi_2(M)\to\mathbb{R},\quad \hat{I}_\omega(u) = \int_{S^2}u^*\omega
\end{aligned}
$$

写 $j:\pi_2(M)\to\pi_2(M,L)$ 为典则同态, 则

$$\hat{I}_\omega(a) = I_\omega(j(a)),\quad \forall a\in\pi_2(M).\tag{4}$$

命题3 若 $\varphi:M\to M$ 正合(exact)同痕于恒同映射 id_M, 则对 $(M\times M,\omega\oplus(\omega))$ 中它的图象 Lagrange 子流形

$$L:=\mathrm{Graph}(\varphi)=\{(x,\varphi(x))\mid x\in M\}$$

有常数 $\lambda\in\mathbb{R}$, 使

$$I_{\omega\oplus(-\omega)} = \lambda I_{\mu,L}\Leftrightarrow\hat{I}_\omega = 2\lambda I_{c_1}.\tag{5}$$

证明 设 $\varphi_t:M\to M$ 为 φ 到 id_M 的一个正合同痕, 则

$$\Phi_t = id_M\times\varphi_t:(M\times M,\omega\oplus(-\omega))\to(M\times M,\omega\oplus(-\omega))$$

是从 $id_M\times\varphi$ 到 $id_{M\times M}$ 的一个正合同痕, 且有 $\Phi_1(\Delta_M)=\mathrm{Graph}(\varphi)$. 利用 Maslov 指标的辛同痕不变性及 $I_{\omega\oplus(-\omega)}$ 的正合同痕不变性可知如有常数 $\lambda\in\mathbb{R}$ 使 $I_{\omega\oplus(-\omega)}=\lambda I_{\mu,L}$, 则有

$$I_{\omega\oplus(-\omega)} = \lambda I_{\mu,\Delta_M}$$

成立. 反之变然. 因此(5)等价于

$$I_{\omega\oplus(-\omega)} = \lambda I_{\mu,\Delta_M}\Leftrightarrow\hat{I}_\omega = 2\lambda I_{c_1}.\tag{6}$$

对任何光滑映射 $v=(v_1,v_2):(D^2:\partial D^2)\to(M\times M,\Delta_M)$, 如 $I_{\omega\oplus(-\omega)}(v)=\lambda I_{\mu,\Delta_M}(v)$, 则由定理及其证明知 $I_{\omega\oplus(-\omega)}(v)=\hat{I}_\omega(\tilde{v})$ 和 $I_{\mu,\Delta_M}(v)=2c_1(M)(\tilde{v})$. 这表明 $\hat{I}_\omega(\tilde{v})=2\lambda I_{c_1}(\tilde{v})$. 注意到任何光滑映射 $u:S^2\to M$ 可写为这种形式, 得到 $\hat{I}_\omega=2\lambda I_{c_1}$. 从证明知反过来也成立, (6)得证 □

按照[2], [4], 如有常数 $\lambda\geq0$ 使 $\hat{I}_\omega=\lambda I_{c_1}$ 或 $I_\omega=\lambda I_{\mu,L}$ 则称 (M,ω) 或 L 是单调辛流形或单调

Lagrange 子流形. 对应地在 $\lambda< 0$时分别称为反单调辛流形或反单调Lagrange 子流形.

Arnold 关于辛流形上正合辛微分同胚的不动点的个数下界和辛流形中两个Lagrange 子流形交点个数的下界有一族猜测, 其中一个猜测断言: 如闭辛流形(M, ω)上正合辛微分同胚 φ 的所有不动点都非退化, 则# Fix(φ)不小于M 的所有Betti 数之和. 对适当的紧对称Hermite 空间, 从[4]中定理III可推出这个猜测成立.

命题4 设(M, ω, J)是一个紧Hermite 空间, 并且子群$[c_1(M)|\pi_2(M)]\subset Z$ 的正生成子不小于2(不可约紧Hermite 对称空间上此条件成立). 若正合辛微分同胚 $\varphi: M\to M$ 的所有不动点非退化, 则# Fix$\varphi\geq SB(M; Z_2)$. □

注意到$(M\times M, \omega\oplus(\omega), J\oplus(-J))$也是紧Hermite 对称空间, 且 Δ_M 是反全纯对合等距

$$\sigma: (M\times M, J\oplus(-J))\to(M\times M, J\oplus(-J)), (x, y)\mapsto(y, x)$$

的不动点集, $\Delta_M=$ Fixσ. 在命题4假设下, 由命题3有 $\Sigma_{\Delta_M}\geq 4$, 因此结论可从[5]中主要定理推出.

参 考 文 献

[1] V. I Arnold, Funct. Anal. Appl., 1(1967), 1- 14.

[2] A. Floer, Commun. Math. Phys., 120(1989), 575- 611.

[3] D. McDuff, D. Salamon, *Introduction to syplectic topology*, Clarendon Press, Oxford, 1915.

[4] Y. G. Oh, Comm. Pure. Appl. Math., Vol. 46, No. 7, 1993.

[5] Y. G. Oh, To appear in the volume in memory of A. Floer.

[6] Y. G. Oh, Comm. Pure. Appl. Math., *XLVIII*(1995), 1299- 1302.

[7] C. Viterbo, Bull. Soc. Math. France, 115(1987), 361- 390.

A Maslov Index Formula and Application

Lu Guangcun

(Nankai Ins. of Math., Nankai Univ., Tianjin 300071)

Abstract

In this note we give a relation formula between the Maslov index of the Lagrange submanifold Δ_M in the product symplectic manifold $(M\times M, \omega\oplus(\omega))$ and the first Chern class $c_1(M)$ and discuss its application.

Keywords Maslov index, Lagrange submanifold, monotone symplectic manifold.