第17卷第3期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 17 No. 3
1997年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 1997

关于 Schur-Frobenius 求逆公式的一般化*

庄 瓦 金
(漳州师范学院数学系, 福建363000)

摘　要　对于$(1,\cdots,i)$-逆诸情形, 本文证得了非交换主理想整环R上分块矩阵的Schur-Frobenius求逆公式的一般化定理, 进而将广义Schur补的Haynsworth商公式开拓到R上.

关键词　非交换主理想整环, von Neumann 正则矩阵, 广义 Schur 补, Schur-Frobenius 求逆公式, Haynsworth 商公式

分类号　AMS(1991) 15A/CCL O151.21

关于复分块矩阵的 Schur-Frobenius 求逆公式[1,2]

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1}+A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix},$$

文[3-5]对(1)-逆, (1,2)-逆, Moore-Penrose 逆诸情形作了推广. 注意到这些推广有一个重要的条件: 分块矩阵的关于广义 Schur 补的秩可加性条件成立. 因此, 在文[6,7]基础上, 本文证得了这些推广在非交换主理想整环R上的开拓, 并利用此也将广义 Schur 补的 Haynsworth 商公式[8-10]推广到R上.

本文约定, R是一个非交换主理想整环[11,12]. R上矩阵及其广义逆的术语、记号如[6,7]所述. 特别地, 设$A\in R^{m\times n}$,

$$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\in R^{(m+s)\times(n+t)}. \tag{1}$$

若A (D) von Neumann 正则, $A^{(1)}\in A\{1\}$ $(D^{(1)}\in D\{1\})$, 则称$D-CA^{(1)}B$ $(A-BD^{(1)}C)$为M中A (D)关于$A^{(1)}$ $(D^{(1)})$的广义 Schur 补, 记作$(M/A)_{A^{(1)}}$ $((M/D)_{D^{(1)}})$, 简记为M/A (M/D).

现在, 我们来阐述R上分块矩阵的 Schur-Frobenius 求逆公式的一般化.

定理1　设M如(1)所示, M, A皆 von Neumann 正则, $A^{(1)}\in A\{1\}$, $M/A=D-CA^{(1)}B$也正则; 又设

$$N=\begin{pmatrix} A^{(1)}+A^{(1)}B(M/A)^{(1)}CA^{(1)} & -A^{(1)}B(M/A)^{(1)} \\ -(M/A)^{(1)}CA^{(1)} & (M/A)^{(1)} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

其中$(M/A)^{(1)}\in(M/A)\{1\}$, 那么

(i)　$N\in M\{1\}$, 当且仅当以下秩可加性条件成立:

$$\mathrm{Rank}M=\mathrm{Rank}A+\mathrm{Rank}M/A, \tag{3}$$

* 1994年9月9日收到. 福建省自然科学基金资助.

即

$$\begin{cases}(I_m - AA^{(1)})B(I_t - (M/A)^{(1)}M/A) = 0, \\ (I_s - (M/A)(M/A)^{(1)})C(I_n - A^{(1)}A) = 0, \\ (I_m - AA^{(1)})B(M/A)^{(1)}C(I_n - A^{(1)}A) = 0;\end{cases} \tag{4}$$

(ii) 若 $N \in M\{1\}$, 则 $N \in M\{1, 2\}$, 当且仅当 $A^{(1)} \in A\{1, 2\}$, 且 $(M/A)^{(1)} \in (M/A)\{1, 2\}$.

证明 对 MNM 计算、整理知道 $N \in M\{1\}$, 当且仅当 (4) 成立. 于是, 由[6]推论3及其证明知道 (i) 正确.

又计算 NMN, 易证 (ii) 的充分性成立, 并且当 $N \in M\{1, 2\}$ 时, 有

$$\begin{cases}(M/A)^{(1)}(I_s - (M/A)(M/A)^{(1)})^{(1)}) - (M/A)^{(1)}CA^{(1)}(I_m - AA^{(1)})B(M/A)^{(1)} = 0, & ① \\ (M/A)^{(1)}CA^{(1)}(I_m - AA^{(1)}) + (M/A)^{(1)}CA^{(1)}(I_m - AA^{(1)})B(M/A)^{(1)}CA^{(1)} & \\ \quad + ((M/A)^{(1)} - (M/A)^{(1)}(M/A)(M/A)^{(1)})CA^{(1)} = 0, & ② \\ A^{(1)}(I_m - AA^{(1)}) + A^{(1)}B(M/A)^{(1)}CA^{(1)}(I_m - AA^{(1)}) & \\ \quad + A^{(1)}B((M/A)^{(1)} - (M/A)^{(1)}(M/A)(M/A)^{(1)})CA^{(1)} & \\ \quad + (I_n + A^{(1)}B(M/A)^{(1)}C)A^{(1)}(I_m - AA^{(1)})B(M/A)^{(1)}CA^{(1)} = 0. & ③\end{cases}$$

注意到 $I_s - (M/A)(M/A)^{(1)}$ 是幂等矩阵, 将①右乘之, 则由 (4) 得到 $(M/A)^{(1)} \in (M/A)\{1, 2\}$. 于是, 将②右乘以 $I_m - AA^{(1)}$, 则得

$$(M/A)^{(1)}CA^{(1)}(I_m - AA^{(1)}) = 0.$$

又③右乘以 $I_m - AA^{(1)}$, 并注意到由①, ②所得的结果, 则有 $A^{(1)} \in A\{1, 2\}$, 故 (ii) 成立. 证毕.

定理2 设 R 带有对合反自同构 σ, M, N 同定理1所设, 那么

(i) $M\{1, 4\} \neq \varnothing$, 且 $N \in M\{1, 4\}$, 当且仅当

$$\begin{cases}A\{1, 4\} \neq \varnothing, \text{且} A^{(1)} \in A\{1, 4\}, \\ (M/A)\{1, 4\} \neq \varnothing, \text{且} (M/A)^{(1)} \in (M/A)\{1, 4\}, \\ \mathrm{Rank}\begin{pmatrix}A \\ C\end{pmatrix} = \mathrm{Rank}A, \\ \mathrm{Rank}\begin{pmatrix}B \\ D\end{pmatrix} = \mathrm{Rank}(M/A);\end{cases} \tag{5}$$

(ii) $M\{1, 3\} \neq \varnothing$, 且 $N \in M\{1, 3\}$, 当且仅当

$$\begin{cases}A\{1, 3\} \neq \varnothing, \text{且} A^{(1)} \in A\{1, 3\}, \\ (M/A)\{1, 3\} \neq \varnothing, \text{且} (M/A)^{(1)} \in (M/A)\{1, 3\}, \\ \mathrm{Rank}(A, B) = \mathrm{Rank}A, \\ \mathrm{Rank}(C, D) = \mathrm{Rank}(M/A);\end{cases} \tag{6}$$

(iii) M 的 Moore-Penrose 逆存在, 且 $N = M^+$, 当且仅当

$$\begin{cases} A^{+} \text{ 存在, 且} A^{(1)} = A^{+}, \\ (M/A)^{+} \text{ 存在, 且} (M/A)^{(1)} = (M/A)^{+}, \\ \operatorname{Rank}(A, B) = \operatorname{Rank}\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \operatorname{Rank} A, \\ \operatorname{Rank}(C, D) = \operatorname{Rank}\begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} = \operatorname{Rank}(M/A). \end{cases} \tag{7}$$

证明 若(5)成立, 注意到

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -CA^{(1)} & I_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ M/A \end{pmatrix},$$

则由[6]引理2、定理1知道

$$C(I_n - A^{(1)}A) = 0, \quad B(I_t - (M/A)^{(1)}M/A) = 0.$$

于是(4)成立, 即有 $N \in M\{1\}$; 并且此时经计算有

$$NM = \begin{pmatrix} A^{(1)}A & 0 \\ 0 & (M/A)^{(1)}(M/A) \end{pmatrix},$$

故 $N \in M\{4\}$, 充分性得证

反之, 则(4)成立; 且由 $(NM)^{*} = NM$, 经计算得到

$$\begin{cases} A^{(1)}A - A^{(1)}B(M/A)^{(1)}C(I_n - A^{(1)}A) \\ \quad = A^{*}(A^{(1)})^{*} - (I_n - A^{*}(A^{(1)})^{*})C^{*}((M/A)^{(1)})^{*}B^{*}(A^{(1)})^{*}, & ④ \\ A^{(1)}B(I_t - (M/A)^{(1)}M/A) = (I_n - A^{*}(A^{(1)})^{*})C^{*}((M/A)^{(1)})^{*}, & ⑤ \\ (M/A)^{(1)}C(I_n - A^{(1)}A) = (I_t - (M/A)^{*}((M/A)^{(1)})^{*})B^{*}(A^{(1)})^{*}, & ⑥ \\ (M/A)^{(1)}(M/A) = (M/A)^{*}((M/A)^{(1)})^{*}. & ⑦ \end{cases}$$

由⑦知道 $(M/A)^{(1)} \in (M/A)\{1, 4\}$. 又将⑥右乘以 $(I_n - A^{(1)}A)^{*}$, 并注意到(4), 则

$$(M/A)^{(1)}C(I_n - A^{(1)}A)(I_n - A^{(1)}A)^{*} = 0. \qquad ⑧$$

于是, 将④右乘以 $(I_n - A^{(1)}A)^{*}$, 则得

$$A^{(1)}A - A^{(1)}AA^{*}(A^{(1)})^{*} = 0.$$

类似地, 将④, ⑤分别左乘以 $I_n - A^{(1)}A$, 则得

$$A^{*}(A^{(1)})^{*} - A^{(1)}AA^{*}(A^{(1)})^{*} = 0.$$

故 $(A^{(1)}A)^{*} = A^{(1)}A$, 即 $A^{(1)} \in A\{1, 4\}$. 于是, 由⑧得到

$$(M/A)(M/A)^{(1)}C(I_n - A^{(1)}A) = 0. \qquad ⑨$$

此时, 将⑨与(4)的第二式相加, 得

$$C(I_n - A^{(1)}A) = 0.$$

从而由[6]定理1知道 $\operatorname{Rank}\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \operatorname{Rank} A$.

再注意到 $\operatorname{Rank}\begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} = \operatorname{Rank}\begin{pmatrix} B \\ M/A \end{pmatrix}$, 类似可证 $\operatorname{Rank}\begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} = \operatorname{Rank}(M/A)$. 故必要性正确 (i)得证

类似(i)的证明可证(ii)成立

由上及定理1知道(iii)正确 证毕

注意其"对偶性",还可得到定理1, 2的"对偶"结果 例如:

设 R, M 如定理2所述, D, $M/D=A-BD^+C$ 的Moore-Penrose 逆皆存在, 那么 M^+ 存在, 且

$$M^+=\begin{pmatrix}(M/D)^+ & -(M/D)^+BD^+\\ -D^+C(M/D)^+ & D^++D^+C(M/D)^+BD^+\end{pmatrix},\tag{8}$$

当且仅当

$$\begin{cases}\mathrm{Rank}(C,D)=\mathrm{Rank}\begin{pmatrix}B\\D\end{pmatrix}=\mathrm{Rank}D,\\ \mathrm{Rank}(A,B)=\mathrm{Rank}\begin{pmatrix}A\\C\end{pmatrix}=\mathrm{Rank}(M/D).\end{cases}$$

注意到Moore-Penrose 逆的唯一性, 由定理2(iii)易得

推论1 R, M 同定理2所设, A, $M/A=D-CA^+B$ 的Moore-Penrose 逆皆存在 若

$$\begin{cases}\mathrm{Rank}(A,B)=\mathrm{Rank}\begin{pmatrix}A\\C\end{pmatrix}=\mathrm{Rank}A,\\ \mathrm{Rank}(C,D)=\mathrm{Rank}\begin{pmatrix}B\\D\end{pmatrix}=\mathrm{Rank}(M/A),\end{cases}$$

则 M^+ 存在, 且 M^+ 中 $(M/A)^+$ 关于 M/A 的广义 Schur 补 $M^+/(M/A)^+=A^+$, 即

$$(M^+/(M/A)^+)^+=A.\tag{9}$$

推论2 若 $R=K$ 是一个对合体[13], K 上矩阵

$$M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{array}{cc|c} m & n & \\ \hline E^*E & E^*F & m\\ GE & D & t\end{array}.$$

若 $\mathrm{Rank}E^*E=\mathrm{Rank}EE^*=\mathrm{Rank}E$, 则广义 Schur 补 M/A 是唯一确定的, 且

$$\mathrm{Rank}M=\mathrm{Rank}A+\mathrm{Rank}(M/A).$$

于是如(2)所示之 $N\in M\{1\}$.

证明 注意其秩条件, 由[14]定理2, 3知道 $(E^*E)^{(1)}E^*\in E\{1,2,3\}$, $E^*(EE^*)^{(1)}\in E\{1,2,4\}$. 于是, 注意到[14]定理5, 有

$$E(E^*E)^{(1)}E^*=EE^*(EE^*)^{(1)}E(E^*E)^{(1)}E=EE^+.$$

所以, $\forall A^{(1)}\in A\{1\}$, 广义 Schur 补

$$M/A=D-CA^{(1)}B=D-GE(E^*E)^{(1)}E^*F=D-GEE^+F$$

是唯一确定的; 并且

$$AA^{(1)}B=E^*E(E^*E)^{(1)}E^*F=E^*EE^+F=E^*F=B,$$

$$CA^{(1)}A=GE(E^*E)^{(1)}E^*E=GEE^+E=GE=C.$$

于是(4)成立 所以由定理1可得本推论正确 证毕

若推论1, 2中的 R 皆为 p-除环[15], 则推论1中的矩阵的Moore-Penrose 逆存在性的假设与推论2中的秩条件 $\mathrm{Rank}E^*E=\mathrm{Rank}EE^*=\mathrm{Rank}E$ 均可省去 此外, 由定理2与(8)还有

定理3 设 $R=K$ 是一个 p-除环, M 如(1)所示 若

$$\begin{cases} \mathrm{Rank}(A,B)=\mathrm{Rank}\begin{pmatrix}A\\C\end{pmatrix}=\mathrm{Rank}A=\mathrm{Rank}(M/D), \\ \mathrm{Rank}(C,D)=\mathrm{Rank}\begin{pmatrix}B\\D\end{pmatrix}=\mathrm{Rank}D=\mathrm{Rank}(M/A), \end{cases}$$

则

$$M^{+}=\begin{pmatrix} (M/D)^{+} & -A^{+}B(M/A)^{+} \\ -D^{+}C(M/D)^{+} & (M/A)^{+} \end{pmatrix}.$$

最后考虑定理1的一个应用, 今将广义 Schur 补的商公式推广到非交换主理想整环上

定理3 设 R 上的分块矩阵

$$M=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}=\begin{array}{c|c} \begin{matrix} n_1 & n_2 & t \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix}E&F&B_1\\G&H&B_2\\C_1&C_2&D\end{pmatrix} & \begin{matrix}m_1\\m_2\\s\end{matrix} \end{array}, \tag{10}$$

其中 $E,A,A/E=H-GE^{(1)}F$ 皆正则 若

$$\begin{cases} \mathrm{Rank}(A,B)=\mathrm{Rank}\begin{pmatrix}A\\C\end{pmatrix}=\mathrm{Rank}A, & (11) \\ \mathrm{Rank}(E,F)=\mathrm{Rank}\begin{pmatrix}E\\G\end{pmatrix}=\mathrm{Rank}E, & (12) \end{cases}$$

那么

$$\mathrm{Rank}(E,F,B_1)=\mathrm{Rank}\begin{pmatrix}E\\G\\C_1\end{pmatrix}=\mathrm{Rank}E, \tag{13}$$

并且广义 Schur 补 M/A, A/E 与 M/E 都是唯一确定的, 且有 Haynsworth 商公式

$$M/A=(M/E)/(A/E). \tag{14}$$

证明 由(11)与[6]定理1得到 $B=AA^{(1)}B$, $C=CA^{(1)}A$, 其中 $A^{(1)}\in A\{1\}$. 于是

$$B_1=(E,F)A^{(1)}B,\quad C_1=CA^{(1)}\begin{pmatrix}E\\G\end{pmatrix}.$$

从而由[6]秩的定义及引理3知道

$$\mathrm{Rank}(E,F,B_1)=\mathrm{Rank}((E,F),(E,F)A^{(1)}B)=\mathrm{Rank}(E,F),$$

$$\mathrm{Rank}\begin{pmatrix}E\\G\\C_1\end{pmatrix}=\mathrm{Rank}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}E\\G\end{pmatrix}\\ CA^{(1)}\begin{pmatrix}E\\G\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\mathrm{Rank}\begin{pmatrix}E\\G\end{pmatrix}.$$

因此, 由(12)知道(13)成立

又 $\forall A^{(1)}, A^{-}\in A\{1\}$, 由上有

$$\begin{aligned}(M/A)_{A^{(1)}}&=D-CA^{(1)}B=D-CA^{(1)}AA^{(1)}AA^{(1)}B\\ &=D-CA^{(1)}AA^{-}AA^{(1)}B=D-CA^{-}B=(M/A)_{A^{-}},\end{aligned}$$

即 M/A 是唯一确定的 类似地, 利用(12), (13)可证 A/E, M/E 是唯一确定的

由(12), (13)与[6]定理1知道

$$M=\begin{pmatrix} E & EL & ES \\ PE & H & B_2 \\ QE & C_2 & D \end{pmatrix},$$

其中L, S, P, Q 均为R 上相应的矩阵. 于是

$$M/E=\begin{pmatrix} H & B_2 \\ C_2 & D \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} PE \\ QE \end{pmatrix}E^{(1)}(EL, ES)=\begin{pmatrix} A/E & B_2-PES \\ C_2-QEL & D-QES \end{pmatrix}.$$

所以

$$(M/E)/(A/E)=D-QES-(C_2-QEL)(A/E)^{(1)}(B_2-PES).$$

又

$$M/A=D-(QE, C_2)\begin{pmatrix} E & EL \\ PE & H \end{pmatrix}^{(1)}\begin{pmatrix} ES \\ B_2 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

且由(12)及$E, A/E$ 之正则知道: 对于$\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$, 定理1(i)的条件成立. 于是有

$$\begin{pmatrix} E & EL \\ PE & H \end{pmatrix}^{(1)}=\begin{pmatrix} E^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} E^{(1)}EL \\ -I_{n_1} \end{pmatrix}(A/E)^{(1)}(PEE^{(1)}, -I_{m_1}).$$

从而注意到广义Schur 补的唯一性, 将此代入10 可得(14)成立. 证毕.

参 考 文 献

[1] J. Schur, *Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt siad*, J. Reine Angew. Math., 147(1917), 205-232.

[2] ф Р Гантмахер, Теория Матриц, Наука, 1966, 59-64.

[3] G. Marsaglia and G. P. H. Styan, *Rank conditions for generalized inverses of partitioned matrices*, Sānkhyā A, 36(1974), 437-442.

[4] F. Burns, D. Carlson, E. Haynsworth and T. Markham, *Generalized inverse fomulas using the Schur complement*, SIAM J. Appl. Math., 26(1974), 254-259.

[5] D. Carlson, *Matrix decompositions involving the Schur complement*, SIAM J. Appl. Math., 28(1975), 577-587.

[6] 庄瓦金, 非交换主理想整环上分块矩阵的秩, 数学研究与评论, 14: 2(1994), 265-270.

[7] 庄瓦金, 非交换主理想整环上矩阵的(1, …, i)-逆, 新疆大学学报(自然科学版), 10: 3(1993), 40-45.

[8] E. V. Haynsworth, *On the Schur complement*, Basel Math. Notes 20, June, 1968.

[9] A. Ostrowski, *A new proof of Haynsworth's quotient fomula for Schur complements*, Lin. Alg. Appl., 4(1971), 389-392.

[10] D. Carlson, E. V. Haynsworth and T. Markham, *A generalization of the Schur complement by means of the Moore-Penrose inverse*, SIAM J. Appl. Math., 26(1974), 169-175.

[11] N. Jacobson, *The Theory of Rings*, Math. Surveys 2, Amer. Math. Soc., 1943.

[12] 万哲先, 特征数≠2的非交换主理想整环上线性群的自同构, 数学学报, 7(1957), 533-573.

[13] P. K. Draxl, *Skew Fields*, London Math. Soc. Note Ser. 81, Cambridge, 1983.
[14] **庄瓦金，任意体上矩阵的** ρ-Moore-Penrose **逆的某些显式，数学季刊**，3: 2(1988)，1- 6.
[15] **屠伯埙，** p**-除环上矩阵的广义逆，数学学报**，29(1986)，246- 248.

On Generalization of Schur-Frobenius's Formula for Inverse Matrix of Partitioned Matrices

Zhuang Wajin
(Zhangzhou Normal College, Fujian 363000)

Abstract

Let R be a non-commutative principal ideal domain. A generalized theorem on Schur-Frobenius's formula of inverse matrix in R is proved, and the Haynsworth's quotient formula of a generalized Schur complement is generalized to R.

Keywords non-commutative principal ideal domain, von Neumann regular matrix, generalized Schur complement, Schur-Frobenius's formula of inverse matrix, Haynsworth's quotient formula.