第17卷第3期 数学研究与评论 Vol. 17 No. 3
1997年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1997

仿射李代数B_∞的顶点表示*

姜翠波 孟道骥
(烟台师范学院数学系, 山东264025) (南开大学南开数学研究所, 天津300071)

摘 要 本文通过一类顶点算子给出了完备无限秩仿射李代数B_∞的水平为2的不可约最高权表示

关键词 主顶点算子, 完备无限秩仿射李代数, 水平, 不可约最高权表示
分类号 AMS(1991) 17B/CCL O152.5

1 引 言

仿射李代数表示理论的一个重要内容就是寻找仿射李代数的不可约最高权表示的具体实现, 这类表示在数学和其它学科中都有着广泛的应用, 尤其是仿射李代数的顶点表示的结果已在方程和量子力学等理论中得到直接的应用. [1], [2]及[3]分别用不同的顶点算子构造了ADE型仿射李代数的水平为1的不可约可积表示. [4]用顶点算子构造了$B_l^{(1)}, C_l^{(1)}, G_2^{(1)}, F_4^{(1)}$的一类水平为1的顶点表示, 而[5]与[6]通过引入与[4]不同的顶点算子构造了这四种李代数的一类水平为1的不可约最高权表示. [7]构造了完备无限秩仿射李代数A_∞与B_∞的水平为1的主顶点表示. 本文是在[7]的基础上构造了B_∞的水平为2的不可约最高权表示.

2 预备知识

设A为复数域C上一个型如$X_\infty = A_\infty$或B_∞的无限仿射矩阵, $g'(A)$为相应于A的无限秩仿射李代数, H为$g'(A)$的Cartan子代数, Δ及$\Pi = \{\alpha_i \mid i \in I \subseteq \mathrm{Z}\}$分别为其根系和单根系, 其中Z为整数集合, $\Delta^\vee$及$\Pi^\vee = \{\alpha_i^\vee \mid i \in I \subseteq \mathrm{Z}\}$表示其对偶根系和单上根系. 则当$A = A_\infty$时, $I = \mathrm{Z}$; 当$A = B_\infty$时, $I = \mathrm{Z}_+$, Z_+为非负整数集合.

令$\overline{gl}_\infty = \{(a_{ij})_{i,j\in \mathrm{Z}} \mid a_{ij} \in \mathrm{C}$, 且当$|i-j|$充分大时$a_{ij} = 0\}$, 则$\overline{gl}_\infty$关于通常矩阵的换位运算作成一个李代数.

令$\overline{X}_\infty = \{u = \sum_\alpha a_\alpha e_\alpha \mid a_\alpha \in \mathrm{C}, e_\alpha \in g'(A)_\alpha$, 且集合$\{j \mid ht\alpha = j, a_\alpha \neq 0\}$是有限的$\}$, 则$\overline{X}_\infty$为$\overline{gl}_\infty$的子代数, $g'(A)$为$\overline{X}_\infty$的子代数. 在$\overline{gl}_\infty$中有一个2-上循环:

$$\Psi(E_{ij}, E_{ji}) = -\Psi(E_{ji}, E_{ij}) = 1, \text{若 } i \leq 0, j \geq 1,$$

其余情形$\Psi(E_{ij}, E_{mn}) = 0$.

仍然以$X_\infty = \overline{X}_\infty \oplus \mathrm{C}c$表示$\overline{X}_\infty$的中心扩张, X_∞中的换位运算为:

* 1994年12月19日收到. 国家自然科学基金和山东省自然科学基金资助课题

$$[a+\lambda cb+\mu c]=ab-ba+r\psi(a,b)c,$$

其中 $a,b\in\overline{X}_\infty$, $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$, 且当 $A=A_\infty$ 时, $r=1$, 当 $A=B_\infty$ 时, $r=\frac{1}{2}$. X_∞ 称为完备无限秩仿射李代数

记 $\prod_{i\in I}\mathbb{C}\alpha_i^\vee$ 为子空间 $u_i=\mathbb{C}\alpha_i^\vee$ 的直积, 则 $\widetilde{H}=\prod_{i\in I}\mathbb{C}\alpha_i^\vee+\mathbb{C}c$ 为 X_∞ 的子代数, 称为 X_∞ 的 Cartan 子代数 $\widetilde{\Pi}^\vee=\{\widetilde{\alpha}_0^\vee=\alpha_0^\vee+c,\widetilde{\alpha}_i^\vee=\alpha^\vee i,i\in I,i\neq 0\}$ 为 X_∞ 的单上根系

3 顶点表示

设 $V=\mathbb{C}[x_1,x_2,\cdots]$, 即 V 为复数域上的一个多项式空间, $\widetilde{V}$ 为 V 的形式完备化 设 u,v 为两个独立复参数, 定义 $\widetilde{V}$ 上的算子如下:

$$X(u,v)=\frac{u}{u-v}\exp\left(\sum_{j\geq 1}(u^j-v^j)x_j\right)\exp\left(-\sum_{j\geq 1}\frac{1}{j}(u^{-j}-v^{-j})\frac{\partial}{\partial x_j}\right)-\frac{u}{u-v},$$

将 $X(u,v)$ 分解为 $X(u,v)=\sum_{i,j\in\mathbb{Z}}u^iv^{-j}X_{ij}$, 则 X_{ij} 为 V 上的算子, 称为 V 的主顶点算子.

为区别于 B_∞, 记 A_∞ 的中心为 c_0, 即 $A_\infty=\overline{A}_\infty\oplus\mathbb{C}c_0$.

引理 3.1[7] 设 $\mathrm{End}(V)$ 为 V 上所有的线性变换作成的李代数, 定义 A_∞ 到 $\mathrm{End}(V)$ 的线性映射 π_0:

$$\pi_0(E_{ij})=X_{ij},i\neq j,i,j\in\mathbb{Z};\pi_0(E_{ii}-E_{jj})=X_{ii}-X_{jj},i,j\in\mathbb{Z};\pi_0(c_0)=id.$$

则 (π_0,V) 为 A_∞ 的一个不可约最高权表示, 且 $V=L(\Lambda_0)$, 其中 Λ_0 为 A_∞ 的 Cartan 子代数上的线性函数, 满足 $\Lambda_0(\widetilde{\alpha}_0^\vee)=1$, $\Lambda_0(\widetilde{\alpha}_i^\vee)=0$, $i\in\mathbb{Z}$, $i\neq 0$.

由于 $\overline{B}_\infty\subseteq\overline{A}_\infty$, 定义 B_∞ 到 A_∞ 的线性映射 ρ: $\rho(x)=x$, 对 $x\in\overline{B}_\infty$, $\rho(c)=2c_0$.

引理 3.2 ρ 为李代数 B_∞ 到 A_∞ 的一个单射同态

定理 1 B_∞ 到 $\mathrm{End}(V)$ 的线性映射 π: $\pi(x)=\pi_0(\rho(x))$, $x\in B_\infty$ 给出了 B_∞ 的一个可积表示 (π,V).

4 权系分解

本节证明了 V 是 B_∞ 的水平为 2 的不可约最高权模

设 A 为一个无限仿射矩阵, $g'(A)$ 为相应于 A 的无限秩仿射李代数, $L(\Lambda)$ 为 $g'(A)$ 的一个以 Λ 为最高权的不可约最高权模, 将 $L(\Lambda)$ 分解为权子空间之直和, 即

$$L(\Lambda)=\bigoplus_{\lambda\in P}L(\Lambda)_\lambda,\quad P\text{ 为权系},$$

则 $\lambda\leq\Lambda$, 即 $\Lambda-\lambda=\sum_{i\in I}k_i\alpha_i$, 且 $k_i\geq 0$.

若 $\lambda=\Lambda-\sum_{i\in I}k_i\alpha_i$ 为一个权, 定义

$$\deg\lambda=\sum_{i\in I}k_i,\tag{4.1}$$

令

$$L(\Lambda)_j=\bigoplus_{\deg\lambda=j}L(\Lambda)_\lambda,\tag{4.2}$$

则

$$L(\Lambda) = \bigoplus_{j\in \mathbb{Z}_+} L(\Lambda)_j.$$

定义 $\dim_q L(\Lambda) = \sum_{j\in \mathbb{Z}_+} \dim(L(\Lambda)_j) q^j$, $\dim_q L(\Lambda)$ **称为** $L(\Lambda)$ **的** q-**维数**

引理4.1[7] **设** $L(\Lambda)$ **为** $g'(A)$ **的一个不可约最高权模, 则**

$$\dim_q L(\Lambda) = \prod_{\alpha\in \Delta_+^\vee} \left(\frac{1-q^{\langle \Lambda+\rho, \alpha\rangle}}{1-q^{\langle \rho, \alpha\rangle}}\right)^{\mathrm{mult}\alpha}.$$

引理4.2 **设** $L(\Lambda_0)$ **为** $g'(A_\infty)$ **的以** Λ_0 **为最高权的不可约最高权模,** $L(2\Lambda_0)$ **为** $g'(B_\infty)$ **的以** $2\Lambda_0$ **为最高权的水平为2的不可约最高权模, 则**

$$\dim_q L(\Lambda_0) = \prod_{j\geq 1}(1-q^j)^{-1}, \dim_q L(2\Lambda_0) = \prod_{j\geq 1}(1-q^j)^{-1}.$$

其中 $\Lambda_0 \in H^*$, **满足** $\Lambda_0(\alpha_0^\vee) = 1, \Lambda_0(\alpha_i^\vee) = 0, i\in I, i\neq 0.$

设 $V = \mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots]$, **对** $x_j \in V$, **定义** $\deg x_j = j$, **若** $v = x_{i_1}^{k_1} x_{i_2}^{k_2}\cdots x_{i_n}^{k_n}$, **则** $\deg v = \sum_{s=1}^{n} k_s i_s$, **令** $V_{(j)}$ **为由满足** $\deg v = j$ **的元素** v **生成的子空间, 则**

$$V = \bigoplus_{j\in \mathbb{Z}_+} V_{(j)}. \tag{4.3}$$

(4.3) **称为** V **的一个分次** V **的一个子空间** W **称为可分次的, 如果有** $W = \bigoplus_{j\in \mathbb{Z}_+}(W\cap V_{(j)})$.

定义

$$\mathrm{Ch}_q V = \sum_{j\in \mathbb{Z}_+} \dim V_{(j)} q^j. \tag{4.4}$$

由引理2.1, V **为** A_∞ **的一个基础模, 即** $V = L(\Lambda_0)$. **从(4.1)和(4.2)可得到**

$$V_{(j)} = L(\Lambda_0)_j,\ \dim_q L(\Lambda_0) = \mathrm{Ch}_q V.$$

易知 $1\in V$ **为** B_∞ **的相应于最高权** $2\Lambda_0$ **的最高权向量, 设** W **为以1为最高权向量的** V **的最高权子模, 这里** Λ_0 **满足** $\Lambda_0(c) = 1, \Lambda_0(\alpha_i^\vee) = 0, i\in I, c$ **为** B_∞ **的中心. 由定理1,** W **为一个可积模, 所以** W **是** B_∞ **的一个不可约最高权模, 即** $W = L(2\Lambda_0)$.

定理2 1) V **作为** B_∞-**模是可对角化的**

2) $V = W\oplus W_1$, W_1 **也为** V **的子模**

3) W **和** W_1 **都是可分次的, 且** $\mathrm{Ch}_q W = \dim_q L(2\Lambda_0)$.

证明 **当** $A = A_\infty$ **时, 记** $g'(A)$ **的Cartan子代数为** H_0, **当** $A = B_\infty$ **时, 记** $g'(A)$ **的Cartan子代数为** H_1. V **作为一个** A_∞-**模, 有权空间分解**

$$V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$$

设 $\lambda_0 = \Lambda_0 - \sum_{i\in \mathbb{Z}} k_i\alpha_i$ **为一个权,** v_0 **为相应的一个权向量, 则**

$$\pi_0(h)v_0 = \lambda_0(h)v_0, \quad \forall h\in H_0 \tag{4.5}$$

$$\pi_0(c_0)v_0 = \lambda_0(c_0)v_0 = v_0.$$

由于 $H_1\subseteq H_0$, **且当** $i\geq 1$ **时, 限制在** H_1 **上有** $\alpha_{-i} = \alpha_{i-1}$, **所以** $\sum_{i\in \mathbb{Z}} k_i\alpha_i = \sum_{i\geq 0} k_i\alpha_i + \sum_{i\geq 1} k_{-i}\alpha_{i-1}$ **在** H_1 **上成立. 令**

$$\lambda_1 = 2\Lambda_0 - \sum_{i\geq 0} k_i\alpha_i - \sum_{i\geq 1} k_{-i}\alpha_{i-1}, \tag{4.6}$$

其中 $\alpha_i \in I$ 为 $g'(B_\infty)$ 的单根, $\Lambda_0(c) = 1, \Lambda_0(\alpha_i^\vee) = 0, i \in I$. 则有

$$\pi(h)v_0 = \lambda_1(h)v_0, \quad \forall h \in H_1 \qquad (4.7)$$
$$\pi(c)v_0 = \lambda_1(c)v_0 = 2v_0.$$

因此作为 B_∞-模, V 中向量 v_0 为相应于权 λ_1 的一个权向量, 所以 V 可对角化, 且对每个权 λ, 都有 $\lambda \leq 2\Lambda_0$.

因 V 为可积模, 且由 1) V 可对角化, 所以 2) 成立.

因为 V 是可对角化的, 所以由[7]性质 1.5 得到 W 和 W_1 都是可分次的. 根据(4.5)—(4.7) 有 $\deg\lambda_0 = \deg\lambda_1$. 所以 $L(2\Lambda_0)_j = W_{(j)}$, 3) 成立.

推论 (π, V) 为完备无限秩仿射李代数 B_∞ 的一个水平为 2 的不可约最高权表示, 且 $V = L(2\Lambda_0)$.

参 考 文 献

[1] V. G. Kac, D. A. Kazhdan, J. Lepowsky and R. L. Wilson, *Realization of the basic representations of the Euclidean Lie algebras*, Advances in Math., 42(1981), 83-112.

[2] I. B. Frenkel and V. G. Kac, *Basic representations of affine Lie algebras and dual resonance models*, Invent. Math., 62(1980), 23-66.

[3] G. Segal, *Unitary representations of some infinite dimensional groups*, Comm. Math. Phy., 80 (1981), 301-342.

[4] P. Goddard, W. Nahm, D. Olive and A. Schwimmer, *Vertex operators for non-simply-laced algebras*, Comm. Math. Phys, 107(1986), 179-212.

[5] Xu Yichao and Jiang Cuibo, *Vertex operators of $G_2^{(1)}$ and $B_l^{(1)}$*, J. Phys A: Math. Gen., 23 (1990), 3105-3121.

[6] 姜翠波, 仿射李代数 $F_4^{(1)}$ 和 $C_l^{(1)}$ 的一类标准模, 数学物理学报, 13: 1(1993), 23-33.

[7] V. G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, Second edition, Cambridge, Cambridge University Press, 1985.

The Vertex Representation of Affine Lie Algebra B_∞

Jiang Cuibo

(Dept. of Math., Yantai Teachers' College, Shandong 264025)

Meng Daoji

(Nankai Inst. of Math. and Dept. of Math., Nankai University, Tianjin 300071)

Abstract

The level 2 irreducible highest weight module of completed infinite rank affine Lie algebra B_∞ is given, on the basis of the vertex representation of A_∞.

Keywords level, vertex operator, completed infinite rank affine Lie algrbra, irreducible highest weight module.