第17卷第3期 数学研究与评论 Vol. 17 No. 3
1997年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1997

一类扰动多项式系统极限环*

陈 士 华
(武汉水利电力大学应用数学系, 430072)

摘 要 本文对一类多项式扰动系统的极限环进行了研究, 得到了极限环个数的上界估计, 弥补了文献[2]主要定理的不足

关键词 多项式系统, 极限环, 上界.
分类号 AMS(1991) 34C/CCL O175.12

考虑平面自治系统

$$\begin{cases} \mathring{x} = -y + \epsilon P_n(y)x \\ \mathring{y} = x + \epsilon Q_n(x)y \end{cases} \tag{$1)_\epsilon$}$$

其中 $P_n(y) = \sum_{i=0}^{n} a_i y^i, Q_n(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ 为实系数多项式 显见 $x = a\cos t, y = a\sin t$ 是$(1)_0$过点$(a, 0)$之轨线, 且$(1)_0$之任意轨线与射线$L = \{(x, y) | y = 0, x \geq 0\}$横截相交 在$L$上任取一点$A(a, 0)$, 则当$0 < |\epsilon| \ll 1$时, $(1)_\epsilon$过A之轨线必再次与L相交, 设交点横坐标为$P(a)$, 由[1]

$$P(a) - a = M_1(a)\epsilon + o(\epsilon),$$

其中$M_1(a) = a^2\int_0^{2\pi}[P_n(a\sin t)\cos^2 t + Q_n(a\cos t)\sin^2 t]dt$ 当$M_1(a) \neq 0$时, $(1)_\epsilon$极限环个数之上界$B(n)$由$M_1(a)$的正零点个数(重数计算在内)决定, 从而易得$B(n) \leq [\frac{n}{2}]$(此即文[2]的主要定理, 但[1]遗漏了重要条件$M_1(a) \neq 0$). 当$M_1(a) \equiv 0$, 即

$$a_{2i} + b_{2i} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, [\frac{n}{2}]) \tag{2}$$

时, 由[3]知:

$$P(a) - a = M_2(a)\epsilon^2 + o(\epsilon^2),$$

其中

$$M_2(a) = -a^2\int_0^{2\pi}[P_n(a\sin t) + Q_n(a\cos t)]\int_0^t[P_n(a\sin s)\cos^2 s + Q_n(a\cos s)\sin^2 s]dsdt$$

设

$$\Phi(a) = \int_0^{2\pi}[P_n(a\sin t) + Q_n(a\cos t)]\int_0^t[P_n(a\sin s)\cos^2 s + Q_n(a\cos s)\sin^2 s]dsdt \neq 0,$$

* 1994年11月19日收到 国家自然科学基金资助课题

则 $B(n)$ 由 $\Phi(a)$ 之正根个数决定

注意到

$$\int_0^{2\pi} \sin^m t \cos^n t \, dt = 0 \quad (\text{当 } m \text{ 或 } n \text{ 为正奇数}), \tag{3}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2m} t \, dt = \int_0^{2\pi} \cos^{2m} t \, dt = \frac{2\pi(2m-1)!!}{(2m)!!} \quad (m \text{ 为自然数}), \tag{4}$$

则有:

引理1　当 m, n, k 为自然数, 且 m 与 n 的奇偶性不同时

$$\int_0^{2\pi} (\cos^{2k} t - \sin^{2k} t) \int \sin^m s \cos^n s \, ds \, dt = 0.$$

引理2　当 m, n, k 为自然数, 则

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2k-1} t \int \sin^n s \cos^m s \, ds \, dt \begin{cases} \neq 0 & (m \text{ 为偶数}, n \text{ 为奇数}), \\ = 0 & (\text{其它})。 \end{cases}$$

引理3　若 m, n, k 为自然数, 则

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2k-1} t \int \sin^n s \cos^m s \, ds \, dt \begin{cases} \neq 0 & (m \text{ 为奇数}, n \text{ 为偶数}), \\ = 0 & (\text{其它}). \end{cases}$$

由此可得

定理1　若 $n \geq 3$ 为自然数, $M_1(a) \equiv 0$, 且 $\Phi(a) \not\equiv 0$, 则当 $0 < |\epsilon| \ll 1$ 时, $B(n) \leq n-2$

证明　由(2)知 $a_{2i} = -b_{2i}$, 又当 $n = 2m$ 时, 记 $a_{2m+1} = b_{2m+1} = 0$, 则由引理1, 引理2及引理3得 $\Phi(a) = I_1 + I_2 + I_3$, 其中

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} b_{2i} a^{2i} (\cos^{2i} t - \sin^{2i} t) \int \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} b_{2i} a^{2i} (\cos^{2i} s \sin^2 s - \sin^{2i} s \cos^2 s) \, ds \, dt,$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} b_{2i+1} a^{2i+1} \cos^{2i+1} t \int \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} a_{2i+1} a^{2i+1} \sin^{2i+1} s \cos^2 s \, ds \, dt,$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} a_{2i+1} a^{2i+1} \sin^{2i+1} t \int \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} b_{2i+1} a^{2i+1} \cos^{2i+1} s \sin^2 s \, ds \, dt.$$

由此可见 $\Phi(a)$ 是 a 的 $2n$ 次多项式, 奇次项系数为0, 常数项为0, a^2 项之系数为

$$b_0 b_2 \int_0^{2\pi} (\cos^2 - \sin^2 t) \int (\sin^2 s - \cos^2 s) \, ds \, dt + a_1 b_1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} (\sin^4 - \cos^4 t) \, dt = 0 .$$

从而由多项式知识, $\Phi(a)$ 至多有 $(n-2)$ 个正零点, 故有 $B(n) \leq n-2$ 证毕

注1　对于文[2]所讨论的自治系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x + \epsilon Q_n(x) y, \end{cases}$$

如果 $M_1(a) \equiv 0$, 则 $b_{2i} = 0$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, [\frac{n}{2}])$, 从而利用对称原理知 $O(0,0)$ 是中心

注2　定理1仅在 $M_1(a) \equiv 0$, $M_2(a) \not\equiv 0$ 时成立, 若 $M_1(a) \equiv 0$, $M_2(a) \equiv 0$, 例如 $(1)_\epsilon$ 中 $n = 1$, $n = 2$ 时, 则需另行研究 下面仅对 $n = 1$ 进行研究, $n = 2$ 时可用相同方法研究(略去).

$n = 1$ 时, 若 $M_1(a) \equiv 0$, 则 $(1)_\epsilon$ 可表为

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \epsilon(-\alpha + b_1 y)x, \\ \dot{y} = x + \epsilon(\alpha + b_2 x)y. \end{cases} \tag{5}$$

定理2 当 $\alpha=0$ 或 $b_1^2=b_2^2$ 且 $1-\epsilon^2\alpha^2>0$ 时,(5)的奇点 $O(0,0)$ 是中心.

证明 若 $\alpha=0$,则(5)可写出通积分,由此易知 $O(0,0)$ 是中心. 若 $\alpha\neq 0$,令 $u=x+y$, $v=x-y$,则(5)化为

$$\begin{cases} \dot{u} = (1-\epsilon\alpha)v + \dfrac{\epsilon}{4}(b_1+b_2)(u^2-v^2), \\ \dot{v} = -(1+\epsilon\alpha)u + \dfrac{\epsilon}{4}(b_1-b_2)(u^2-v^2). \end{cases}$$

此时利用 $b_1^2=b_2^2$, $1-\epsilon^2\alpha^2>0$ 及对称原理知原点 $O(0,0)$ 是中心. □

利用极坐标变换 $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$,(5)化为

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} = \epsilon\rho[-\alpha\cos 2\theta + \rho(b_1\cos^2\theta\sin\theta + b_2\sin^2\theta\cos\theta)], \\ \dfrac{d\theta}{dt} = 1 + \epsilon[2\alpha\sin\theta\cos\theta + \rho(b_2\cos^2\theta\sin\theta - b_1\sin^2\theta\cos\theta)]. \end{cases} \tag{6}$$

设(5)过 $(a,0)$ 之轨线方程为

$$\rho(\theta) = a + \epsilon\rho_1(\theta) + \epsilon^2\rho_2(\theta) + \epsilon^3\rho_3(\theta) + \cdots,$$

其中 $\rho_i(\theta)$ 满足初始条件

$$\rho_i(0) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \cdots).$$

由(6)易得

$$\rho_1(\theta) = -\alpha a\sin\theta\cos\theta + \frac{b_1 a^2}{3}(1-\cos^3\theta) + \frac{b_2 a^2}{3}\sin^3\theta$$

引理4 $\rho_2(2\pi) = 0$.

证明 易见

$$\frac{d\rho_2}{d\theta} = J_1 + J_2 + J_3, \tag{7}$$

其中

$$J_1 = -a\left[-\alpha\cos 2\theta + \frac{1}{2}a(b_1\cos\theta + b_2\sin\theta)\sin 2\theta\right]\left[\alpha\sin 2\theta + \frac{1}{2}a(b_2\cos\theta - b_1\sin\theta)\sin 2\theta\right],$$

$$J_2 = a\rho_1(\theta)(b_1\cos^2\theta\sin\theta + b_2\sin^2\theta\cos\theta),$$

$$J_3 = \rho_1(\theta)[-\alpha\cos 2\theta + a(b_1\cos^2\theta\sin\theta + b_2\sin^2\theta\cos\theta)].$$

利用(7)直接积分便知 $\rho_2(2\pi) = 0$.

引理5 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\rho_2(\theta)\cos 2\theta\, d\theta = -\frac{\pi a^3}{192}(b_2^2 - b_1^2).$

证明 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\rho_2(\theta)\cos 2\theta\, d\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2\theta(J_1 + J_2 + J_3)\, d\theta$

$$= \frac{3\pi a^3}{64}(b_2^2 - b_1^2) - \frac{5\pi a^3}{96}(b_2^2 - b_1^2) = -\frac{\pi a^3}{192}(b_2^2 - b_1^2).$$

引理 6 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\rho_2(\theta)(b_1\sin\theta\cos^2\theta + b_2\sin^2\theta\cos\theta)\, d\theta = \frac{\pi\alpha a^2}{96}(b_2^2 - b_1^2).$

证明 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\rho_2(\theta)(b_1\sin\theta\cos^2\theta + b_2\sin^2\theta\cos\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{3}(b_1\cos^3\theta - b_2\sin^3\theta)(J_1 + J_2 + J_3)\, d\theta$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{\pi\alpha a^2}{32}(b_2^2 - b_1^2) - \frac{5\pi\alpha a^2}{32}(b_2^2 - b_1^2) + \frac{5\pi\alpha a^2}{32}(b_2^2 - b_1^2)\right] = \frac{\pi\alpha a^2}{96}(b_2^2 - b_1^2).$$

引理7 $\rho_3(2\pi) = -\frac{59}{192}\pi\alpha a^3(b_2^2 - b_1^2).$

证明　注意到

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_3}{d\theta} = & -J_1\left[\alpha\sin 2\theta + \frac{1}{2}a(b_2\cos\theta - b_1\sin\theta)\sin 2\theta\right] \\ & - aJ_3(b_2\cos^2\theta\sin\theta - b_1\sin^2\theta\cos\theta) \\ & - (J_3 + J_2)\left[2\alpha\sin\theta\cos\theta + a(b_2\cos^2\theta\sin\theta - b_1\sin^2\theta\cos\theta)\right] \\ & + \rho_2(\theta)\left[-\alpha\cos 2\theta + a(b_1\cos^2\theta\sin\theta + b_2\sin^2\theta\cos\theta)\right] \\ & + a\rho_2(\theta)(b_2\cos^2\theta\sin\theta + b_2\sin^2\theta\cos\theta).\end{aligned}$$

利用引理5及引理6, 直接积分便得

$$\rho_3(2\pi) = -\frac{59}{192}\pi\alpha a^3(b_2^2 - b_1^2).$$

由引理6立得

定理3　当 $\alpha(b_2^2 - b_1^2) \neq 0$, **且** $0 < |\epsilon| \ll 1$**时**, (5) **无极限环**.

参　考　文　献

[1] J. Guckenheimer, P. Holmes, *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*, Appl. Math. Sci 42, New York, Springer-Verlag, 1983.

[2] 王锋, 关于扰动系统 $\mathring{x} = y + \epsilon P_n(y)x, \mathring{y} = -x + \epsilon Q_n(x)y$ 极限环个数的上界, 数学研究与评论, 10: 4(1990), 552-554.

[3] Li Baoyi, Zhang Zhifen, *A note of a G. S. Petrov's result about the weakened 16th Hilbert problem*, Adv. Math., 23: 2(1994), 189-191.

On the Limit Cycles of the Polynomial Perturbed System

Chen Shihua

(Wuhan University of Hydraulic and Electric Engineering, 430072)

Abstract

In this paper, we study a class of polynomial perturbed systems, get the upper-bound of the number of limit cycles on a certain condition and make a correction on the main theorem in the paper [2].

Keywords　polynomial perturbed system, upper-bound, limit cycles