第17卷第3期 数学研究与评论 Vol. 17 No. 3
1997年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug. 1997

一阶拟线性偏微分方程广义Cauchy问题的整体光滑解*

施 法 鹏
(华东冶金学院, 安徽马鞍山243002)

摘 要 本文研究了下列一阶拟线性偏微分方程的广义Cauchy问题: $u_t+\lambda(u)u_x=0$, $u|_\Gamma=\varphi(x)$, $\Gamma: x=r(\sigma), t=s(\sigma)$. 证明了该问题在一定条件下, 于上半平面 $\Omega=\{-\infty<x<+\infty, t\geq 0\}$ 上存在整体光滑解.

关键词 广义Cauchy问题, 一阶拟线性偏微分方程, 整体光滑解

分类号 AMS(1991) 36L65/CCL O175.22

1 引 言

习惯上将偏微分方程的初始条件给在某已知直线上(如 x 轴)的定解问题称为一般Cauchy问题; 而将初始条件给在某已知曲线上的定解问题称为广义Cauchy问题. 因此一般Cauchy问题是广义Cauchy问题的特殊情形. 在实际问题中, 比如火箭的烧蚀, 钢液的凝固, 冰雪的融化等问题往往归结为广义Cauchy问题. 因此研究广义Cauchy问题有一定理论背景与实际背景.

近若干年来, 对一般Cauchy问题整体光滑解的研究比较深入, 如文献[1], [2], [3], [4]. 但对广义Cauchy问题整体光滑解的研究还鲜为少见, 正如文献[5]所指出的那样, "这个问题(指广义Cauchy问题整体光滑解)在 $n=2$ 时也没有见到有人研究过, 也许更难一些, 也许更有意义一些."

为此, 本文研究了两个自变量的一阶拟线性方程的广义柯西问题, 证明在一定条件下, 于上半面存在整体光滑解, 并将相应的一般Cauchy问题的结论归结为本文结果的特殊情形.

2 主要定理及其证明

考察上半平面 $\Omega=\{-\infty<x<+\infty, t\geq 0\}$ 上的一阶拟线性方程的广义Cauchy问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+\lambda(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}=0, & (1)\\ u|_\Gamma=\varphi(\sigma), & (2)\end{cases}$$

其初始曲线 Γ 的参数方程为

* 1994年11月12日收到. 1997年4月5日收到修改稿.

$$\Gamma: x = r(\sigma), t = s(\sigma) \quad (\sigma \in [a, b] \text{ 或 } \sigma \in (-\infty, +\infty)). \tag{3}$$

首先假设

[H_1] Γ 为不与(1)、(2)的特征线相切的光滑或分段光滑的无重点的已知曲线, 且满足

$$r'^2(\sigma) + s'^2(\sigma) \neq 0; \tag{4}$$

[H_2] $\lambda(u), \varphi(x), r(x), s(x)$ 为具有一阶连续导数的已知函数

下面应用特征线法求解广义Cauchy 问题(1), (2).

过 Ω 上的任一点(x, t)作方程(1)特征线, 该特征线与曲线 Γ 交于点$M(r(\beta), s(\beta))$(相应于 $\sigma = \beta$). 以 $x_0 = r(\beta), t_0 = s(\beta)$为初始值得到(1)的下列特征方程的柯西问题:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \lambda(u), \dfrac{du}{dt} = 0, & (5) \\ \sigma = \beta: x = r(\beta), t = s(\beta), u = \varphi(r(\beta), s(\beta)) = \varphi(\beta). & (6) \end{cases}$$

沿特征线积分(5)、(6), 得

$$\begin{cases} u = \varphi(\beta), & (7) \\ x = r(\beta) + \displaystyle\int_{s(\beta)}^{t} \lambda(\varphi(\beta)) d\tau = r(\beta) + \lambda(\varphi(\beta))(t - s(\beta)). & (8) \end{cases}$$

改写(7)、(8)为下列函数方程组

$$\begin{cases} F(x, t, u, \beta) \equiv r(\beta) + \lambda(u)(t - s(\beta)) - x = 0, & (9) \\ G(x, t, u, \beta) \equiv \varphi(\beta) - u = 0. & (10) \end{cases}$$

因此广义Cauchy 问题(1), (2)的求解问题, 归结为函数方程组(9), (10)所确定的二元隐函数 $u(x, t)$ 的存在问题 为此必须证明下列两个问题: (i) 若(9), (10) 存在可微的隐函数 $u(x, t)$, 那么$u(x, t)$ 是否为方程(1), (2) 的解; (ii) 函数方程(9), (10) 在什么条件下存在隐函数 下面逐一解决这些问题.

命题1 如果函数方程组(9)、(10)存在可微的隐函数$u(x, t)$, 且相应的Jacobi行列式$J \neq 0$, 则该$u(x, t)$即是广义Cauchy 问题(1)、(2)的解

证明 先计算隐函数中的Jacobi行列式,

$$J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, \beta)} = \begin{vmatrix} F_u & F_\beta \\ G_u & G_\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda'(t - s(\beta)) & r' - \lambda s' \\ -1 & \varphi' \end{vmatrix}$$

$$= (r' - \lambda s' - s\lambda'\varphi') + \lambda'\varphi' t, \tag{11}$$

由隐函数的微分法则, 得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F, G)}{\partial(t, \beta)} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} F_t & F_\beta \\ G_t & G_\beta \end{vmatrix} = -\frac{1}{J}\lambda\varphi',$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, \beta)} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} F_x & F_\beta \\ G_x & G_\beta \end{vmatrix} = -\frac{1}{J}\varphi'.$$

从而有

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda(u)\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J}\lambda(u)\varphi'(\beta) + \frac{1}{J}\lambda(u)\varphi'(\beta) = 0.$$

即 $u(x, t)$满足方程(1), 又由(7)知 $u(x, t)$还满足(2).

命题2 在[H_1], [H_2]的假设下, 又设对于非负的实数 h 及 $x \in [a, b]$或 $x \in (-\infty, +\infty)$

成立:

$$\inf_x \frac{d\lambda(\varphi(x))}{dx} \geq 0, \tag{12}$$

$$\inf_x \left\{ \frac{d\lambda(\varphi(x))}{dx} \Big/ \frac{d}{dx}[r(x) - \lambda(\varphi(x))s(x)] \right\} > -h > -\infty, \tag{13}$$

则广义Cauchy 问题(1), (2)在带形区域

$$\Omega_h = \{-\infty < x < +\infty, 0 \leq t < \frac{1}{h}\} \tag{14}$$

上($h=0$, 可理解为 $\Omega_h=\Omega$)存在 $u(x,t)\in C^1(\Omega_h)$ 的光滑解.

证明 由文献[6]知, 关键是判断在 Ω_h 上 Jacobi 行列式 $J\neq 0$.

先就 $h>0$ 来验证 $J\neq 0$ ($h=0$ 时由下面定理给出). 为此, 对任意的 $\epsilon>0$, 作闭区域

$$\overline{\Omega}_{h\epsilon} = \{-\infty < x < +\infty, 0 \leq t \leq \frac{1}{h} - \epsilon\}, \tag{15}$$

由(11), (13), (15)得

$$J = (r' - \lambda s' - s\lambda'\varphi')\left(1 + \frac{\lambda'\varphi'}{r' - \lambda s' - s\lambda'\varphi'}t\right) \geq (r' - \lambda s' - s\lambda'\varphi')(1 - ht)$$
$$\geq (r' - \lambda s' - s\lambda'\varphi')h\epsilon > 0.$$

由隐函数存在定理知, 函数方程组(9), (10)在 $\overline{\Omega}_{h\epsilon}$ 上存在可微的隐函数, 即 $u(x,t)\in C^1(\overline{\Omega}_{h\epsilon})$.

由 ϵ 任意小知, $u(x,t)\in C^1(\Omega_h)$, 再由命题1知 $u(x,t)$ 为 Cauchy 问题(1), (2)的解. □

定理 (整体光滑解存在定理) 在[H_1], [H_2]的假设下, 又设对于 $x\in[a,b]$ 或 $x\in(-\infty,+\infty)$ 成立

$$\frac{d}{dx}\lambda(\varphi(x)) \geq 0, \tag{16}$$

$$\frac{d}{dx}[r(x) - \lambda(\varphi(x))s(x)] > 0, \tag{17}$$

则广义Cauchy 问题(1)、(2)在上半面 Ω 上存在 $u(x,t)\in C(\Omega)$ 的整体光滑解.

证明 对于区域 Ω_h, 令 $h\to 0^+$ (包含 $h=0$), Ω_h 扩展为上半平面 Ω, 由条件(16), (17)及(11)知 Jacobi 行列式在 Ω 上

$$J = \lambda'\varphi' t + (r' - \lambda s' - \lambda'\varphi' s) > 0,$$

由隐函数存在定理知函数方程组(9), (10)在上半平面 Ω 上存在可微的隐函数 $u(x,t)\in C^1(\Omega)$, 由命题1知 $u(x,t)$ 为广义 Cauchy 问题(1), (2)的解. □

推论 设 $\lambda(u), \varphi(x)\in C^1(-\infty,+\infty)$, 且满足

$$\frac{d}{dx}[\lambda(\varphi(x))] \geq 0, \tag{18}$$

则一般 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \lambda(u)\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, & (19) \\ t=0: u=\varphi(x). & (20) \end{cases}$$

于上半面 Ω 上存在整体光滑解.

注 (19), (20)在 Ω 上存在整体光滑解有多种证法, 这儿将(19), (20)作为(1), (2)的特

例, 应用上述定理的结论来证明 也作为该定理的一个应用

证明 在广义 Cauchy 问题(1), (2) 及(3) 中, 令

$$r(a) \equiv \sigma, \quad s(\sigma) \equiv 0, \tag{21}$$

这时广义 Cauchy 问题(1), (2) 即为一般 Cauchy 问题(19), (20), 在(21) 的条件下有

$$r'(\sigma) = 1, \quad s'(\sigma) = 0. \tag{22}$$

再验证条件(17) 如下

$$\frac{d}{dx}[r(x) - \lambda(\varphi(x))s(x)] = r' - \lambda'(u)\varphi'(x)s - \lambda(\varphi(x))s' = 1 > 0.$$

再由条件(18), 直接应用本定理即知, (19), (20) 在 Ω 上存在属于 $u(x, t) \in C^1(\Omega)$. □

参 考 文 献

[1] E. D. Conway, *The formation on and decay of shocks for a conservation law in several dimensions*, Arch. Rat. Mech. Anal., 64: 1(1977), 47- 57.

[2] Li Daqian (Li Ta-tsien), *Global regularity and formation of singularities of solution to first order quasilinear hyperbolic systems*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 87(1981), 255- 261.

[3] 李大潜等, 一阶拟线性双曲组的 Cauchy 问题存在整体光滑解的一个充要条件, 数学学报, 28 (1985), 606- 613.

[4] Li Daqian etc., *Life-span of classical solutions to one dimensional nonlinear wave equations*, Chin. Ann. of Math., 13B: 3(1992), 266- 279.

[5] 复旦大学数学系编, 数理方程续论(内部讲义), 1983, 27- 37.

[6] В. И. Смиров, Курс высщей математики(有中译本), 第三章第一节.

On the Global Smooth Solution for Generalized Cauchy Problem of First Order Quasilinear P. D. E.

Shi Fapeng

(East China Institute of Metallurgy, Maanshan, Anhui 243002)

Abstract

We proper the existence of global smooth solution on $\Omega = \{-\infty, < x < +\infty, t \geq 0\}$ for the generralized Cauchy problem of first order quasilinear P. D. E which is $u_t + \lambda(u)u_x = 0, u|_\Gamma = \varphi(x)$, $\Gamma: x = x(\sigma), t = t(\sigma)$.

Keywords generatized Cauchy problem, first order quasilinear P. D. E, global smooth solution.