

交错纽结补中的不可压缩 两两不可压缩曲面*

韩 友 发

(四平师范学院数学系, 136000)

摘 要 本文利用 twist-crossing number 讨论了交错纽结补中的不可压缩、两两不可压缩曲面的性质. 设 K 是素的交错纽结, $F \subset S^3 - K$ 是不可压缩、两两不可压缩曲面. 如果 K 的 twist-crossing number 不超过5, 则曲面 F 是 punctured sphere.

关键词 纽结, 不可压缩, 两两不可压缩曲面, 扭转交叉数, 穿孔球面

分类号 AM S(1991) 57M 15/CCL O 181

§1 引 言

设 K 是交错纽结 ($K \subset S^3$). 把 K 除了顶点 (crossings) 及附近外投影到二维球面上 ($S^2 = R^2 \cup \{\infty\}$), 而且每一个顶点投影到某个“bubble”上 (图 1).

因此如果 K 有 n 个顶点 (这里把 K 的投影图 D 与 K 认为是一致的), 则存在 n 个“bubbles”. 可以把每一个“bubble”看成 B^3 (三维实心球). 所以就有 n 个 B^3 , 即为 $B_1^3, B_2^3, \dots, B_n^3$ 与 n 个顶点对应. 而且 $B_i^3 \cap S^2 = \Delta_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 是圆盘. 令

$$S_+^2 = (S^2 - \bigcup_{i=1}^n \Delta_i) \cup \bigcup_{i=1}^n (S_i^2)^+,$$

$$S_-^2 = (S^2 - \bigcup_{i=1}^n \Delta_i) \cup \bigcup_{i=1}^n (S_i^2)^-,$$

其中 $(S_i^2)^+$ 和 $(S_i^2)^-$ 分别表示 B_i^3 的上半球和下半球.

$F \subset S^3 - K$ 是曲面, 总能合痕 F 使得 F 与由每个“bubble”所介的球交成 saddle-shaped disc (图 2).

如果对每一个圆盘 $D \subset S^3$ 与 K 横截在一点且 $D \cap F = \emptyset$, 存在一个圆盘 $D' \subset F - K$ 与 K 横截在一点且 $D' = \emptyset$, 则称曲面 F 是两两不可压缩的^[1].

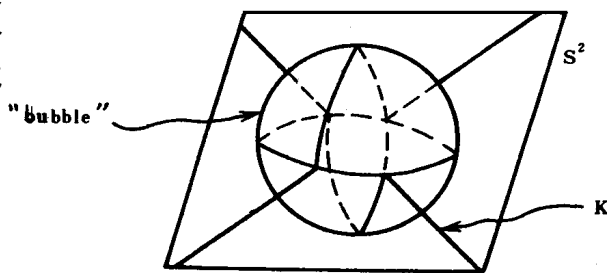


图 1

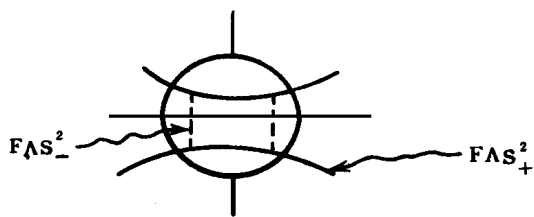


图 2

* 1994年11月17日收到

假设 F 与 S_+^2 和 S_-^2 是横截的, 对每一个分支 $C \subset F \cap S_\pm^2$ 都有一个循环字 $w_\pm(C)$. 它们是由字母 p 和字母 s 组成 它的记录的分别是环道 C 与 K 的相交和 C 与每一个“bubble”的相交, 而且字的一般表示形式是: $w_\pm(C) = p^{i_1} s^{j_1} \dots p^{i_m} s^{j_m}$, 所有字 $w_+(C)$ (或 $w_-(C)$) 里 p 字母的个数总和就是曲面 F 的边界分支数

由于本文讨论的是不可压缩、两两不可压缩曲面, 所以总能把曲面 F 合痕到标准位置 因此以下总假设 F 处在标准位置^{[1], [2]}.

Menasco 在[1]中讨论了交错纽结补中的不可压缩、两两不可压缩曲面的性质, 特别是讨论了曲面的边界分支是 2、4 或 6 时的曲面亏格 在[2]中利用 twist-crossing number 给出了不可压缩、边界不可压缩曲面的欧拉示性数的估值 从而讨论了交错纽结的 cabling 猜想, 所以对不可压缩曲面的性质讨论是很有意义的

本文就是利用 twist-crossing number 讨论了交错纽结补中的不可压缩、两两不可压缩曲面的性质 设 K 是素的交错纽结, $F \subset S^3 - K$ 是不可压缩、两两不可压缩曲面 如果 $TCN(K) \leq 5$, 则 F 是 punctured sphere

§2 主要结果

引理 2.1 设 D 是纽结 K 的约化(reduced) 交错投影图 如果扭转指标(twist-index^[2]) 大于零, 而且 $TCN(K) = M$, 则有下列性质:

- (1) 如果在某个扭转(twist) 中有一个“bubble”有环道 $C \subset F \cap S_\pm^2$ 穿过, 则这个扭转中所有的“bubble”都有环道穿过, 而且每一个“bubble”上的 saddles 是相等的
- (2) 若某个扭转的“bubble”有环道穿过, 则这一组环道是两两不同的

由 F 处在标准位置很容易得到这两个性质 下面给出一个例子来说明性质(2) (图 3).

在图 3 中任意两条环道都是独立的, 比如 x_6 和 x_1 如果是一条环道, 则 x_3 和 x_4 是一条环道, 那么这条环道 x_1 与某个“bubble”相交两次 这矛盾于 F 处在标准位置

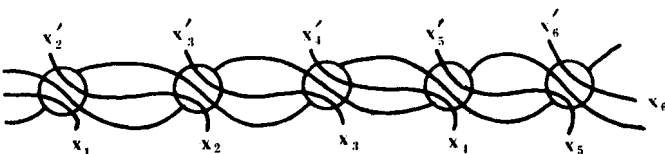


图 3

由性质(2), 如果这个扭转长度等于 N , 则 $F \cap S_+^2$ (或 $F \cap S_-^2$) 至少有 $N + 1$ 条环道; 而且有下列情形之一的环道才有可能是最内的: (a) 穿过每一个扭转两端的环道; (b) 没有穿过任何扭转的环道

定理 2.2 设 K 是素的交错纽结, $F \subset S^3 - K$ 是不可压缩、两两不可压缩曲面 如果 $TCN(K) \leq 5$, 则 F 是 punctured sphere

其中 $TCN = \text{twist-crossing number}$

证明 由 $TCN(K) \leq 5$, 所以扭转图(twist-diagrams) 只有五种情形^[2] (图 4)

现在就两种情形给出证明, 其它情形可类似证明

首先看一下图 4(2). 如果对任意一条环道 $C \subset F \cap S_\pm^2$ 的字都是 $w_\pm(C) = p^i$ 则结论证毕 假设某一条环道 $C \subset F \cap S_\pm^2$ 的字 $w_\pm(C) \neq p^i$. 这样 C 一定遇到某个 saddle, 也就是 C 穿过某个“bubble”. 由引理 2.1(1) 和 F 处在标准位置, 可以得到, 图 4(2) 中的两个扭转中所有的“bubbles”都有环道穿过(图 5). 所有的 bubbles 给出标号分别是 $x_1, x_2, \dots, x_N; y_1, y_2, \dots, y_M$.

由引理 2.1 的注示可知只有环道 $t_1, t_{N+1}; s_1, s_{M+1}$ 可能是最内的 再由引理 2.1(2) 和 F 处在

标准位置可知 t_1 穿过“bubble” y_1 , s_1 穿过“bubble” x_N ; s_{M+1} 穿过“bubble” x_1 , 所以 t_1, s_1, s_{M+1} 都不能是最内环道 同理 t_{N+1} 也不是最内环道 所以不存在 $w_{\pm}(C) = p^{l_1}s^{i_1} \dots p^{l_m}s^{i_m}$ (一定存在某个 $i_0 \neq 0$) 型环道 而且只能有 $w_{\pm}(C) = p^i$ 型环道, 所以对图 4(2) 证毕

其次看一下图 4(5) 的情形 在纽结图 D 的两扭转 T_1 和 T_2 两端的“bubbles”上穿点和下穿点被唯一确定(图 6).

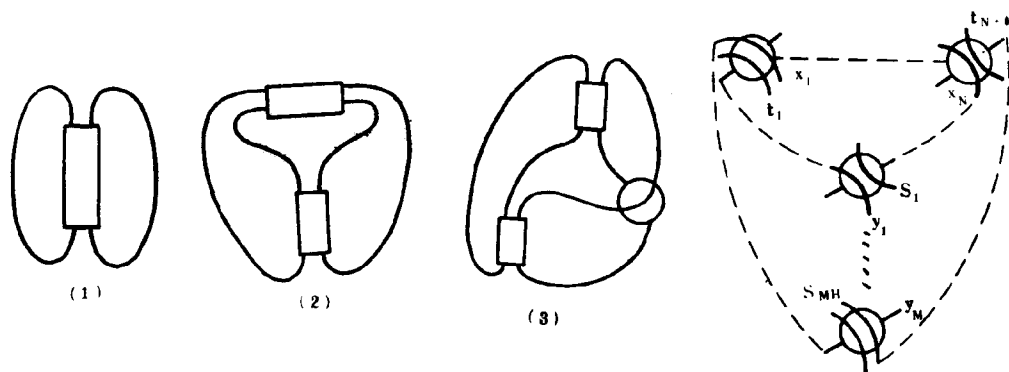


图 5

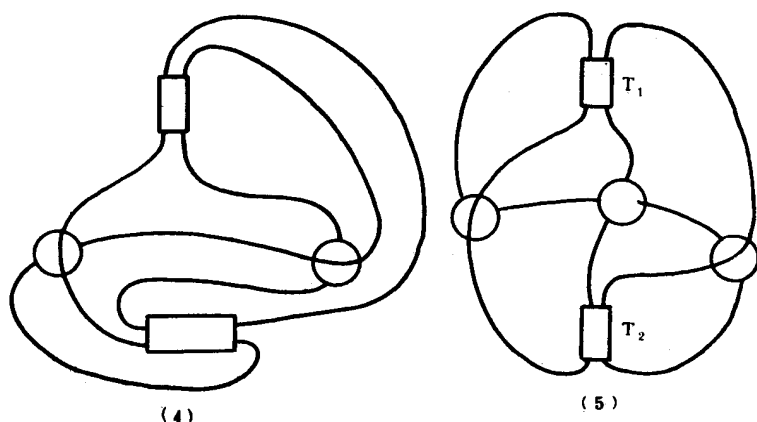


图 4

图 6

从前面的讨论可知, 只有 T_1 和 T_2 两端的环道或者不穿过 T_1, T_2 只穿过“bubbles” s_1, s_2, s_3 的环道可能是最内环道图 7, 或者不穿过任何“bubbles”.

说第二种情形是不可能的 如果存在图 7 的环道 C , 则必有图 8(1). 由 F 处在标准位置可知环道 C' 穿过 T_1 的 bubble 由引理 2.1(1) T_1 中的所有 bubbles 都有环道穿过, 可以推出环道 t_1 与“bubble” s_3 相交至少两次, 矛盾于 F 处在标准位置 所以图 7 中的环道是不存在的

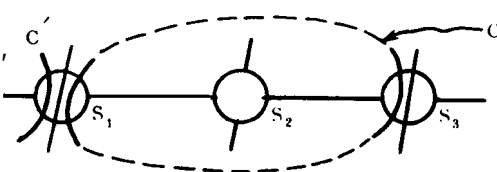


图 7

假设 T_1 中的“bubbles”有环道穿过, 两端的环道是 C_1 和 C_2 (图 8(2)). C_2 穿过 bubbles, s_1, s_2 , C_1 有三种可能: 1) C_1 穿过 s_3 , 2) C_1 穿过 s_2 , 3) C_1 与 s_1 和 s_3 之间的孤 α 相交, 如果是 1) 由 C_2 穿过 s_2 , 则 C_1 与 s_3 相交至少两次, 不可能 如果是 2), 则 C_2 与 s_1 相交至少两次, 矛盾 如果是 3), 则环道 C_2 也与 α 相交, 矛盾于 F 处在标准位置 所

以 T_1 中的 bubble 不能有环道穿过 同理 T_2 也不能有环道穿过 从而环道 C 的字只能是 $w_{\pm}$
 $(C) = p^i$. □

推论 2 3 设 K 是素的纽结且有一个标准纽结图 [2], $N = \min\{\text{TL}(T_1), \text{TL}(T_2), \dots, \text{TL}(T_m)\}$, $F \subset S^3 - K$ 是不可压缩、两两不可压缩曲面 如果 F 的边界分支数 $\#(\partial F) \leq 2(N + 1)$, 则 F 是 punctured sphere

其中: $\text{TL}(T_i) = \text{Twist-Length}(T_i)$, T_i 是标准纽结图的一个扭转 (twist).

由引理 2 1 和 [1] 的引理 2 可以证明这个推论

这样给出了交错纽结补中的不可压缩、两两不可压缩的深刻刻画

注 如果扭转图 D 中没有单点, 推测推论 2 3 的 $\#(\partial F) < 2(N + 1)$ 这个条件可以省略
 本文是在导师吉林大学数学系何伯和教授的指导下完成的, 在此表示衷心的感谢

参 考 文 献

- [1] W. W. Menasco, *Closed incompressible surfaces in alternating and link complements*, Topology 23: 1 (1984), 37- 44
- [2] W. W. Menasco and M. B. Thistlethwaite, *Surfaces with boundary in alternating knot exteriors*, J. Rein. Angew. Math., 426(1992), 47- 65
- [3] Dale Rolfsen, *Knots and Links*, Math. Lecture Series, 1976
- [4] J. Hempel, *3-manifold*, 1976

Incompressible, Pairwisely Incompressible Surfaces in Alternating Knot Complements

Han Youfa

(Siping Teachers College)

Abstract

In this paper, we deal with incompressible, pairwise incompressible surfaces in alternating complements by using twist-crossing number. Let K be a prime alternating knot, $F \subset S^3 - K$ is a incompressible, pairwise incompressible surface. If $\text{TCN}(K) \leq 5$ ($\text{TCN} = \text{twist-crossing number}$), then F is a punctured sphere.

Keywords knot, incompressible, pairwise incompressible surface, twist-crossing number, punctured sphere

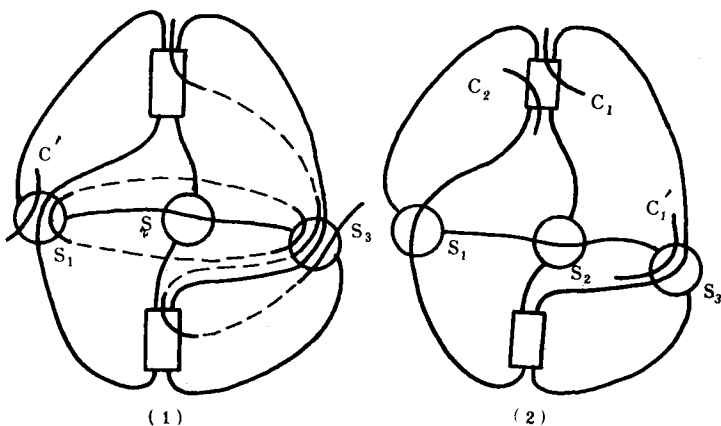


图 8