第17卷第3期　　　　数 学 研 究 与 评 论　　　　Vol. 17 No. 3
1997年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 1997

球面卷积算子的饱和阶*

杨汝月　　熊静宜

(宁夏大学数学系, 银川750021)

摘　要　本文给出了确定球面卷积算子饱和阶的一般方法并举例说明了它的应用.

关键词　球面卷积算子, 乘子算子, 饱和阶.

分类号　AMS(1991) 41A35, 42A10/CCL O174.41, 174.62

§1　引　言

设 $\sigma=\sigma^{n-1}$ 为 n 维欧氏空间 $R^n\ (n\geq 3)$ 中的单位球面. 对于 σ 上的函数空间 $X_p(\sigma)=L^p(\sigma)\ (1\leq p<\infty)$ 或 $C(\sigma)\ (p=\infty)$, 赋以范数

$$\|f\|_{X_p}=\begin{cases}\left(\int|f(\mu)|^p d\mu\right)^{1/p}, & 1\leq p<\infty,\\ \max\limits_{\mu\in\sigma}|f(\mu)|, & p=\infty.\end{cases}$$

满足条件 $\int|f(\theta)|\sin^{2\lambda}\theta d\theta<\infty\ (2\lambda=n-2)$ 的函数 f 形成的集记为 L^1_λ, 显然 $L^1_\lambda\subset L^1$.

设 ρ 为取值于集合 $\mathbf{A}$ 的正参数, ρ_0 为 $\mathbf{A}$ 的极限点. 对每个 ρ, $\varphi_\rho\in L^1_\lambda$. 又设 $\{\varphi_\rho(t)\}$ 为核, 即对每个 $\rho\in\mathbf{A}$ 满足

$$\int\varphi_\rho(\widehat{\mu\mu'})d\mu'=|\sigma^{n-2}|,\tag{1}$$

其中 $|\sigma^{n-2}|$ 为 R^{n-1} 中单位球面的测度, $\widehat{\mu\mu'}$ 为 σ 上点 μ 与 μ' 之间的球面距离.

注意到 $d\mu'=\sin^{2\lambda}\theta d\theta d\sigma^{n-2}\ (0\leq\widehat{\mu\mu'}=\theta\leq\pi)$, 即知(1)等价于

$$\int\varphi_\rho(\theta)\sin^{2\lambda}\theta d\theta=1.\tag{2}$$

对于 $f\in X_p(\sigma)$, 由核 $\{\varphi_\rho(t)\}$ 生成的球面卷积算子定义为

$$T_\rho(f;\mu)=\frac{1}{|\sigma^{n-2}|}\int f(\mu')\varphi_\rho(\widehat{\mu\mu'})d\mu'.\tag{3}$$

因为 $\varphi_\rho\in L^1_\lambda$, 所以 T_ρ 是一个有界的线性算子. 如果 $\{\varphi_\rho(t)\}$ 是逼近恒同的, 那么 $\{T_\rho\}$ 是一致有界的(对 ρ), 且依 X_p 范数收敛到 f.

本文讨论卷积算子族 $\{T_\rho\}$ 的饱和阶. 所用方法是: 从乘子算子的理论着手, 借助于球面移动算子把卷积算子表成乘子算子的形式.

---

* 1994年12月7日收到. 国家自然科学基金资助项目.

从 L^1 到 k 阶球调和子空间的投影算子定义为

$$Y_k(f;\mu)=\frac{\Gamma(\lambda)(k+\lambda)}{2\pi^{\lambda+1}}\int f(\mu')G_k^{\lambda}(\mu\cdot\mu')d\mu'\quad(k\in N_0),$$

其中 $G_k^{\lambda}(t)$ 为 k 阶超球多项式

在 μ 点以 γ 为步长的移动算子是

$$S_{\gamma}(f;\mu)=\frac{1}{|\sigma^{n-2}|\sin^{2\lambda}\gamma}\int_{\mu\mu'=\gamma}f(\mu')d\mu',$$

对 $\mu\in\sigma=\sigma^{n-1}$, 满足 $\mu\mu'=\gamma$ 的 μ' 的集是 R^{n-1} 中以 $\sin\gamma$ 为半径的球面, 此时 $d\mu'$ 是该球面的面积元素

若 $f\in X_p(\sigma)$ 有如下的球调和展开 $f(\mu)\sim\sum_{k=0}^{\infty}Y_k(f;\mu)$, 则由(见[1])

$$S_{\gamma}(f;\mu)\sim\sum_{k=0}^{\infty}R_k^{\lambda}(\cos\gamma)Y_k(f;\mu),\quad T_{\rho}(f;\mu)=\int\varphi_{\rho}(\gamma)S_{\gamma}(f;\mu)\sin^{2\lambda}\gamma d\gamma$$

可得展开式

$$T_{\rho}(f;\mu)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_{\rho}(k)Y_k(f;\mu),\tag{4}$$

其中

$$\lambda_{\rho}(k)=\int\varphi_{\rho}(\gamma)R_k^{\lambda}(\cos\gamma)\sin^{2\lambda}\gamma d\gamma,\ R_k^{\lambda}(\cos\gamma)=G_k^{\lambda}(\cos\gamma)/G_k^{\lambda}(1).\tag{5}$$

这样, 就把(3)定义的卷积表成了乘子算子的形式(4), 且其乘子表达式由(5)给出

由(5)与(2), 得到

$$\lambda_{\rho}(0)=\int\varphi_{\rho}(\gamma)R_0^{\lambda}(\cos\gamma)\sin^{2\lambda}\gamma d\gamma=\int\varphi_{\rho}(\gamma)\sin^{2\lambda}\gamma d\gamma=1.$$

所以, 由(3)定义的球面卷积算子族具有乘子族 $\{\lambda_{\rho}(k)\}_{k=0}^{\infty}$ 且 $\lambda_{\rho}(0)=1.$

§2 主要结果

下面总假定 $\{T_{\rho}\}$ 是 $X_p(\sigma)$ 上的强逼近过程

首先, 依据 Butzer 等人[2, 3]的证明框架易得

定理1 若存在 $\varphi(\rho)\to O^+$ $(\rho\to\rho_0)$, 使得

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{1-\lambda_{\rho}(k)}{\varphi(\rho)}=\tau_k\neq0\quad(k\in N),$$

则 $\{T_{\rho}\}$ 在 $X_p(\sigma)$ 中饱和, 饱和阶是 $O(\varphi(\rho))$, 且 $\{T_{\rho}\}$ 在 $X_p(\sigma)$ 中的不变元仅由常数组成

定理2 若 $\{T_{\rho}\}$ 在 $X_p(\sigma)$ 中关于 $O(\varphi(\rho))$ 饱和, 则存在非零自然数 m, 使得

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{1-\lambda_{\rho}(k)}{1-\lambda_{\rho}(m)}=\tau_k\neq0\quad(k\in N),$$

且

$$\varphi(\rho)\sim1-\lambda_{\rho}(m)\quad(\rho\to\rho_0).$$

定理3 $\{T_{\rho}\}$ 在 $X_p(\sigma)$ 上饱和的充要条件是存在自然数 m, 使

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{1-\lambda_\rho(k)}{1-\lambda_\rho(m)}=\tau_k\neq 0\quad(k\in N),$$

此时$\{T_\rho\}$的饱和阶为$O(1-\lambda_\rho(m))$.

现在转入对正核生成的卷积算子的饱和阶的讨论

定理4 若$\{T_\rho\}$的核$\{\varphi_\rho(t)\}$为正, 且对$0<\delta<\pi$有

$$\int_\delta^\pi\varphi_\rho(\gamma)\sin^{2\lambda}\gamma d\gamma=o(1-\lambda_\rho(1))\quad(\rho\to\rho_0),$$

则$\{T_\rho\}$关于阶$O(1-\lambda_\rho(1))$饱和

证明 由[2]知, 对每个非负整数k有

$$\lim_{\gamma\to 0+}\frac{1-R_k^\lambda(\cos\gamma)}{1-R_1^\lambda(\cos\gamma)}=\frac{k(k+2\lambda)}{2\lambda+1}\overset{\mathrm{def}}{=}\Psi(k,\lambda),$$

于是, 对$\forall\epsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使当$0<\gamma<\delta$时, 成立

$$\left|(1-R_k^\lambda(\cos\gamma))-\Psi(k,\lambda)(1-R_1^\lambda(\cos\gamma))\right|\leq\epsilon(1-R_1^\lambda(\cos\gamma)),$$

从而

$$\begin{aligned}&\left|(1-\lambda_\rho(k))-\Psi(k,\lambda)(1-\lambda_\rho(1))\right|\\&=\left|\int_0^\pi\varphi_\rho(\gamma)\{(1-R_k^\lambda(\cos\gamma))-\Psi(k,\lambda)(1-R_1^\lambda(\cos\gamma))\}\sin^{2\lambda}\gamma d\gamma\right|\\&\leq\epsilon\int_0^\delta\varphi_\rho(\gamma)(1-R_1^\lambda(\cos\gamma))\sin^{2\lambda}\gamma d\gamma+(1+\Psi(k,\lambda))\int_\delta^\pi\varphi_\rho(\gamma)\sin^{2\lambda}\gamma d\gamma\\&=o(1-\lambda_\rho(1))\quad(\rho\to\rho_0),\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{1-\lambda_\rho(k)}{1-\lambda_\rho(1)}=\Psi(k,\lambda)\neq 0\quad(k\in N),$$

故由定理1知定理4为真 证毕

定理5 设$\{T_\rho\}$的核$\{\varphi_\rho(t)\}$为正, 则下列论断等价

(i) 对每个非负整数k, 有$\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{1-\lambda_\rho(k)}{1-\lambda_\rho(1)}=\Psi(k,\lambda)$;

(ii) $\lim_{\rho\to\rho_0}\frac{1-\lambda_\rho(2)}{1-\lambda_\rho(1)}=\Psi(2,\lambda)$;

(iii) $\int_0^\pi\sin^4\frac{\gamma}{2}\varphi_\rho(\gamma)\sin^{2\lambda}\gamma d\gamma=o(1-\lambda_\rho(1))\quad(\rho\to\rho_0)$;

(iv) $\int_\delta^\pi\varphi_\rho(\gamma)\sin^{2\lambda}\gamma d\gamma=o(1-\lambda_\rho(1))\quad(0<\delta<\pi)(\rho\to\rho_0)$.

证明 (i)$\Rightarrow$(ii). 显然

若(ii)满足, 则当$\rho\to\rho_0$时有$(1-\lambda_\rho(2))-\Psi(2,\lambda)(1-\lambda_\rho(1))=o(1-\lambda_\rho(1))$, 即

$$\int_0^\pi\{(1-R_2^\lambda(\cos\gamma))-\Psi(2,\lambda)(1-R_1^\lambda(\cos\gamma))\}\varphi_\rho(\gamma)\sin^{2\lambda}\gamma d\gamma=o(1-\lambda_\rho(1)).$$

注意到$(1-R_2^\lambda(\cos\gamma))-\Psi(2,\lambda)(1-R_1^\lambda(\cos\gamma))=-\frac{8(\lambda+1)}{2\lambda+1}\sin^4\frac{\gamma}{2}$, 便知(iii)成立

(iii)$\Rightarrow$(iv). 这只须利用不等式

$$\int \varphi_\rho(\gamma)\sin^{2\lambda}\gamma d\gamma \le \frac{1}{\sin^4\frac{\delta}{2}}\int \sin^4\frac{\gamma}{2}\varphi_\rho(\gamma)\sin^{2\lambda}\gamma d\gamma.$$

(iv) ⇒ (i). 这是定理4所证明的. 定理5证毕.

定理5就是著名的 Turesky 等价定理在球面上的推广. 它揭示了: 对球面卷积而言, 超球多项式起着对应于一元卷积中 cosine 函数的作用.

称定理5中的四个等价条件为球面 Turesky 条件.

§3 应 用

1. 球面 de La Vallée Poussin 算子

$$V_m(f;\mu) = \frac{1}{|\sigma^{n-2}|}\int f(\mu')v_m(\widehat{\mu\mu'})d\mu', \tag{6}$$

其中 $f\in X_p(\sigma)$, 核函数 $v_m(t) = \frac{1}{I_m}(\cos\frac{t}{2})^{2m}$ $(m\in N)$, 数 I_m 取得使

$$\int v_m(\widehat{\mu\mu'})d\mu' = |\sigma^{n-2}|.$$

显然, $\{v_m(t)\}$ 是一正核, 且是逼近恒同的.

由于 $v_m(t)$ 是一个 m 阶的偶三角多项式, 所以 $V_m(f;\mu)$ 是一个 m 阶的球面多项式.

引理1 对于 $0<\delta<\pi$, 有 $\int v_m(\gamma)\sin^{2\lambda}\gamma d\gamma = o(\frac{1}{m})$ $(m\to\infty)$.

证明 因为

$$I_m = \int \cos^{2m}\frac{\gamma}{2}\sin^{n-2}\gamma d\gamma = 2^{n-1}\int^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}\gamma(\cos\gamma)^{2m+n-2}d\gamma$$

$$= 2^{n-2}B\left(\frac{n-1}{2}, m+\frac{n-1}{2}\right) \sim m^{-\frac{n-1}{2}} \quad (m\to\infty),$$

所以

$$\int v_m(\gamma)\sin^{2\lambda}\gamma d\gamma \le \frac{1}{I_m}\int \cos^{2m}\frac{\gamma}{2}d\gamma \le \frac{\pi}{I_m}(\cos\frac{\delta}{2})^{2m}$$

$$\le cm^{\frac{n-1}{2}}(\cos\frac{\delta}{2})^{2m} = o(\frac{1}{m}) \quad (m\to\infty).$$

引理2 当 $m\to\infty$ 时, 有 $1-\lambda_m(1) = O(\frac{1}{m})$, 其中 $\lambda_m(1) = \int v_m(\gamma)R_1^\lambda(\cos\gamma)\sin^{2\lambda}\gamma d\gamma$.

证明 注意到 $R_1^\lambda(\cos\gamma) = 1-2\sin^2\frac{\gamma}{2}$, 即得

$$1-\lambda_m(1) = \frac{2}{I_m}\int \cos^{2m}\frac{\gamma}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}\sin^{2\lambda}\gamma d\gamma = \frac{2^{2\lambda+2}}{I_m}\int^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2\lambda+2}\gamma\cos^{2m+2\lambda}\gamma d\gamma$$

$$= \frac{2^{2\lambda+1}}{I_m}B\left(\frac{2\lambda+3}{2}, \frac{2m+2\lambda+1}{2}\right) = (n-1)\frac{1}{m+n-1}$$

$$= O(\frac{1}{m}) \quad (m\to\infty).$$

由引理1, 引理2及定理4得到

定理6 由(6)定义的球面卷积算子列$\{V_m\}_{m=1}^{\infty}$在$X_p(\sigma)$中饱和,饱和阶为$O(\frac{1}{m})$.

2 **球面Jackson-Matsuoka卷积算子**

$$J_{\upsilon,r,s}(f;\mu)=\frac{1}{|\sigma^{n-2}|}\int f(\mu')K_{\upsilon,r,s}(\mu\mu')d\mu', \tag{7}$$

其中$f\in X_p(\sigma)$,核函数$K_{\upsilon,r,s}(t)=\frac{1}{C_{\upsilon,r,s}}\left(\sin^{2r}\frac{\upsilon t}{2}\Big/\sin^{2s}\frac{t}{2}\right)$,$\upsilon\in N$,而$r,s$是固定的自然数且满足$2r\geq 2s>\beta+n-1\ (\beta\geq 0)$,取数$C_{\upsilon,r,s}$使得$\int K_{\upsilon,r,s}(\mu\mu')d\mu'=|\sigma^{n-2}|$.

称$\{K_{\upsilon,r,s}(t)\}$为球面Jackson-Matsuoka核 它是正核

因为$K_{\upsilon,r,s}(t)$是一个$r\upsilon-s$阶的偶三角多项式,所以$J_{\upsilon,r,s}(f;\mu)$是一个$r\upsilon-s$阶的球面多项式

当$r=s$时,$J_{\upsilon,r,s}(f;\mu)$就是$s(\upsilon-1)$阶的球面Jackson多项式(见[4]).

引理3 当$2s\geq n+2$时,有

$$\int\sin^4\frac{\gamma}{2}K_{\upsilon,r,s}(\gamma)\sin^{2\lambda}\gamma d\gamma=o(1-\lambda_\upsilon(1))=o\left(\frac{1}{\upsilon^2}\right)\quad(\upsilon\to\infty).$$

证明 因为$1=\int K_{\upsilon,r,s}(\gamma)\sin^{2\lambda}\gamma d\gamma=\frac{1}{C_{\upsilon,r,s}}\int\frac{\sin^{2r}\frac{\upsilon\gamma}{2}}{\sin^{2s}\frac{\gamma}{2}}\sin^{2\lambda}\gamma d\gamma$,所以

$$C_{\upsilon,r,s}=\int\frac{\sin^{2r}\frac{\upsilon\gamma}{2}}{\sin^{2s}\frac{\gamma}{2}}\sin^{2\lambda}\gamma d\gamma=2^{2\lambda}\int\frac{\sin^{2r}\frac{\upsilon\gamma}{2}}{(\sin\frac{\gamma}{2})^{2s-2\lambda}}\cos^{2\lambda}\frac{\gamma}{2}d\gamma$$

$$\sim\int\frac{\sin^{2r}\frac{\upsilon\gamma}{2}}{(\frac{\gamma}{2})^{2s-2\lambda}}\cos^{2\lambda}\frac{\gamma}{2}d\gamma=2\upsilon^{2s-2\lambda-1}\int^{\frac{\upsilon\pi}{2}}\frac{\sin^{2r}u}{u^{2s-2\lambda}}\cos^{2\lambda}\frac{u}{\upsilon}du$$

$$\sim\upsilon^{2s-2\lambda-1}=\upsilon^{2s-n+1}\quad(\upsilon\to\infty).$$

从而

$$1-\lambda_\upsilon(1)=\int K_{\upsilon,r,s}(\gamma)(1-R_1^{\lambda}(\cos\gamma))\sin^{2\lambda}\gamma d\gamma$$

$$=\frac{1}{C_{\upsilon,r,s}}\int\frac{\sin^{2r}\frac{\upsilon\gamma}{2}}{\sin^{2s}\frac{\gamma}{2}}\cdot 2\sin^2\sin^2\frac{\gamma}{2}\sin^{2\lambda}\gamma d\gamma$$

$$=\frac{2}{C_{\upsilon,r,s}}\int\frac{\sin^{2r}\frac{\upsilon\gamma}{2}}{(\sin\frac{\gamma}{2})^{2s}}\sin^{2\lambda}\gamma d\gamma$$

$$\sim\upsilon^{-2s+n-1}\cdot\upsilon^{2s-2-n+1}=\upsilon^{-2}\quad(\upsilon\to\infty).$$

最后得到

$$\int\sin^4\frac{\gamma}{2}K_{\upsilon,r,s}(\gamma)\sin^{2\lambda}\gamma d\gamma=\frac{1}{C_{\upsilon,r,s}}\int\frac{\sin^{2r}\frac{\upsilon\gamma}{2}}{(\sin\frac{\gamma}{2})^{2s-4}}\sin^{2\lambda}\gamma d\gamma$$

$$\sim\begin{cases} \upsilon^{-2s+n-1}\cdot\upsilon^{2s-4-n+1}=\upsilon^{-4} & (2s>n+2)\\ \upsilon^{-2s+n-1}=\upsilon^{-3} & (2s=n+2)\end{cases}$$
$$=o(\upsilon^{-2})=o(1-\lambda_\upsilon(1))\qquad(\upsilon\to\infty).$$

引理3证毕.

由引理3知, 核$\{K_{\upsilon,r,s}(t)\}$满足球面 Turesky 等价条件(iii), 故得

定理7 由(7)定义的球面卷积算子列$\{J_{\upsilon,r,s}\}_{\upsilon=1}^{\infty}$当$2r\geq 2s\geq n+2$时, 以阶$O\left(\frac{1}{\upsilon^2}\right)$在$X_p(\sigma)$中饱和.

参 考 文 献

[1] P. I. Lizorkin and S. M. Nikol'skiǐ, *A theorem concerning approximation on the sphere*, Analysis Mathematica, 9(1983), 207-221.

[2] H. Berens, P. L. Butzer und S. Pawelke, *Limitierungsverfahren von Reihen mehrdimensionaler Kugelfunktionen und deren Saturationsverhalten*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Ser. A., 4(1968), 201-268.

[3] P. L. Butzer, R. J. Nessel and W. Trebels, *On summation processes of Fourier expansions in Banach spaces*, II. *Saturation theorems*, Tôhoku Math. Journ., 24(1972), 551-569.

[4] 李落清、杨汝月, 球面Jackson多项式逼近, 北京师范大学学报(自然版), 27: 1(1991), 6-12.

Saturation Order of Spherical Convolution Operators

Yang Ruyue　　*Xiong Jingyi*

(Dept. of Math., Ningxia Univ., Yinchuan 750021)

Abstract

In the paper we give a general method for determining saturation order for spherical convolution operators, and illustrate two examples.

Keywords spherical convolution operator, multiplier operator, saturation order.