第17卷第4期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol. 17 No. 4
1997年11月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Nov. 1997

关于Thompson定理及两个相关命题的评注*

伍俊良　　易正俊
(重庆大学工商管理学院, 400044)　(重庆大学系统工程及应用数学系, 630044)

摘　要　本文指出了文[1-3]关于复矩阵、实矩阵及四元数矩阵与其(嵌入)子矩阵的奇异值交错不等式的几个定理的局限性, 给出了Thompson定理必须具备的隐含条件, 指出了隐含条件之外仍使Thompson定理成立的两种情形, 进而提出了一个尚须进一步研究的问题

关键词　奇异值, 交错不等式
分类号　AMS(1991) 15A/CCL O151.21

在[1]中, Thompson对长方矩阵与它的任意子矩阵的奇异值交错特征进行了刻画(见[1]定理1及2). 为叙述方便, 给出这两个定理(命题1及命题2)如下:

命题1　设A是$m\times n$阶矩阵, A的奇异值为$\alpha_1\geq\alpha_2\geq\cdots\geq\alpha_{\min(m,n)}$, B是A的$p\times q$阶子矩阵, B的奇异值为$\beta_1\geq\beta_2\geq\cdots\geq\beta_{\min(p,q)}$, 则:

$$\alpha_i\geq\beta_i,\qquad i=1,2,\cdots,\min(p,q),$$
$$\beta_i\geq\alpha_{i+(m-p)+(n-q)},\qquad i\leq\min(p+q-m,p+q-n).$$

从Thompson的第一个证明可知, 命题1又可叙述为:

命题1′　设A是$m\times n$阶矩阵, A的奇异值为$\alpha_1\geq\alpha_2\geq\cdots\geq\alpha_{\min(m,n)}$, 如果$B$嵌入$A$ (即存在m阶和n阶酉矩阵U,V, 使得B是UAV的$p\times q$阶子矩阵), 且B的奇异值为$\beta_1\geq\beta_2\geq\cdots\geq\beta_{\min(p,q)}$, 则

$$\alpha_i\geq\beta_i,\qquad i=1,2,\cdots,\min(p,q),$$
$$\beta_i\geq\alpha_{i+(m-p)+(n-q)},\qquad i\leq\min(p+q-m,p+q-n).$$

命题2　设A是$m\times n$阶矩阵, A的奇异值为$\alpha_1\geq\alpha_2\geq\cdots\geq\alpha_{\min(m,n)}$, 任意给定一列非负数$\beta_1\geq\beta_2\geq\cdots\geq\beta_{\min(p,q)}$, 且满足

$$\alpha_i\geq\beta_i,\qquad i=1,2,\cdots,\min(p,q),$$
$$\beta_i\geq\alpha_{i+(m-p)+(n-q)},\qquad i\leq\min(p+q-m,p+q-n).$$

则存在m阶和n阶酉方阵U,V, 使得UAV的$p\times q$阶矩阵的奇异值是

$$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{\min(p,q)}.$$

从命题1的证明可知, 由于"加标条件"$i\leq\min(p+q-m,p+q-n)$的设置, 对于$p+q-m\leq0$或$p+q-n\leq0$时, 定理的第二个表达式失去意义, 从而结论不成立, 即是说, 对$A^{m\times n}$矩阵

* 1994年7月13日收到

的子矩阵$B^{p\times q}$的奇异值交错特征并不能由 Thompson 定理完全刻画. 定理仅对 $p+q\ge\max(m+1, n+1)$ 的那些子矩阵适用. 后面的结果将表明, 对于 $p+q-m\le 0$ 或 $p+q-n\le 0$ 的一些情形, 其奇异值交错特征仍成立. 其特征与 Thompson 定理相似.

同理, 对命题2, 当 $p+q-m\le 0$ 或 $p+q-n\le 0$ 时命题2的条件不能成立, 从而影响到结论的成立.

Thompson 对定理1给出的第二个证明, 也不能得到定理的第二部分. 例如取 $A\in\mathbb{C}^{8\times 5}$, $B\in\mathbb{C}^{2\times 3}$ 是 A 的子矩阵, 设 A, B 的奇异值分别为 $\alpha_1\ge\alpha_2\ge\cdots\ge\alpha_5$, $\beta_1\ge\beta_2$, 构造 $M=\begin{pmatrix}0 & A\\ A^* & 0\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix}0 & B\\ B^* & 0\end{pmatrix}$, 则由[1]可知: M 的特征值为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_5, 0, 0, 0, -\alpha_5, -\alpha_4, \cdots, -\alpha_1$. N 的特征值为 $\beta_1, \beta_2, 0, -\beta_2, -\beta_1$. 由于 N 是 M 的主子阵, 由 Cauchy 特征值交错定理有: $\alpha_1\ge\beta_1, \alpha_2\ge\beta_2, \alpha_3\ge 0, \alpha_4\ge-\beta_2, \alpha_5\ge-\beta_1$ 及 $\beta_1\ge-\alpha_5, \beta_2\ge-\alpha_4, 0\ge-\alpha_3, -\beta_2\ge-\alpha_2, -\beta_1\ge-\alpha_1$. 从而推出 $\alpha_1\ge\beta_1, \alpha_2\ge\beta_2$ 及命题的第一部分成立, 但不能推出第二部分的结论.

同时, 直接应用定理1(即命题1), $i\le\min(p+q-m, p+q-n)=\min(2+3-8, 2+3-5)=-3$ 时, β_i 失去意义.

在[3]中, 庄瓦金先将复对称矩阵的 Cauchy 特征值交错不等式推广到自共轭四元数矩阵的情况, 再沿用文[1]的第二种证明方法, 结合 Thompson 的定理1, 2(即本文命题1′, 命题2), 得到了推广了的 Thompson 奇异值交借不等式, 其内容如下:

命题3　设 $M\in H^{m\times n}$, $A\in H^{s\times t}$ ($H^{m\times n}$, $H^{s\times t}$ 分别为四元数矩阵集合 $m\ge s, n\ge t$), 它们的奇异值分别为: $\sigma_1\ge\sigma_2\ge\cdots\ge\sigma_{\min(m,n)}$, $\tau_1\ge\cdots\ge\tau_{\min(s,t)}$, 那么 A 嵌入 M 中(即存在广义酉矩阵 U, V, 使得 A 为 UMV 的一个子矩阵)的充分必要条件是

$$\sigma_r\ge\tau_r, \qquad r=1, 2, \cdots, \min(s, t),$$
$$\tau_r\ge\sigma_{r+(m-s)+(n-t)}, \qquad r\le\min(s+t-m, s+t-n).$$

显然该命题是命题1 和命题2的直接推广与综合. 其局限性与 Thompson 的两个定理类似.

倪国熙在文[2](p151, 1- 19行)中, 给出了完全类似于 Thompson 奇异值交错不等式的如下命题:

命题4　设 $A\in R^{m\times n}$, $B_1\in R^{n\times k}$, $C_1\in R^{m\times r}$, B_1, C_1 均为列正交, 则

$$\sigma_{m+n-r-k+i}(A)\le\sigma_i(C_1^TAB_1)\le\sigma_i(A),\quad i=1, 2, \cdots, s=\min(k, r).$$

这一命题的证明过程也没有考虑使 $\sigma_{i+m+n-r-k}(A)$ 成立的加标约束, 造成另一种下标溢出, 因为按[1- 3]关于奇异值的定义, A 的奇异值个数为 $\min(m, n)$, $C_1^TAB_1$ 的奇异值个数为 $\min(k, r)$. 当 $1\le i\le\min(k, r)$ 时, $m+n-k-r+i\ge m+n-k-r+1=m+n-(k+r-1)$. 当 $k+r-1<\min(m, n)$ 时, $m+n-k-r+i\ge m+n-(k+r-1)>m$ (或 n). 此时 $\sigma_{m+n-k-r+i}$ 失去意义.

例如取 $A\in R^{100\times 50}$, $B_1\in R^{100\times 30}$, $C_1\in R^{50\times 20}$, B_1, C_1 均为列正交. 则 $k+r-1=30+20-1=49<\min(100, 50)$. 当 $i=1, 2, \cdots, \min(30, 20)=20$ 时

$$\sigma_1(C_1^TAB_1)\ge\sigma_{101}(A), \sigma_2(C_1^TAB_1)\ge\sigma_{102}(A), \cdots, \sigma_{20}(C_1^TAB_1)\ge\sigma_{120}(A)$$

是没有意义的.

因此, 定理仅对 $k+r\ge\max(m+1, n+1)$ 的那些 B_1 和 C_1 成立. 并不具有普遍性.

综上所述，文[1-3]对奇异值交错特征的刻画，除所取基域不一致外，其内容是一致的。其主要问题在于三种刻画不具有普遍意义。鉴于实数域、复数域与四元数域的包含关系，可将三种刻画归结到四元数矩阵的情形，即庄瓦金的定理(本文命题3)，但须附加条件

$$\max(m+1, n+1) \le p+q \le m+n.$$

对 $p+q-m\le 0$ 或 $p+q-n\le 0$ 的情形，是不包括在 Thompson 定理之中及庄瓦金与倪国熙的定理之中的。但是对如下特殊情形，仍有类似于 Thompson 定理的结论。

定理 设 $A\in C^{m\times n}$, $B\in C^{p\times q}$ 为 A 的 $p\times q$ 阶子矩阵，

i) 如果 $m=p$，而 $p+q-n\le 0$，则 $\sigma_i(A)\ge\sigma_i(B)\ge\sigma_{i+(n-q)}(A)$, $i=1,2,\cdots,q$.

ii) 如果 $n=q$，而 $p+q-m\le 0$，则 $\sigma_i(A)\ge\sigma_i(B)\ge\sigma_{i+(m-p)}(A)$, $i=1,2,\cdots,p$,

其中 $\sigma_i(A)$, $\sigma_i(B)$ 表示 A, B 的奇异值。

为证明定理，只须引入 R. A. Horn and C. R. Johnson[4] 的一个定理作为引理即可。

引理 设 $A\in C^{m\times n}$, $\tilde{A}$ 是取掉 A 的任意一列的子阵，则 $\sigma_i(A)\ge\sigma_i(\tilde{A})\ge\sigma_{i+1}(A)$, $i=1,2,\cdots,n-1$.

对于去掉任一行的情形引理仍成立。因此，定理 i) 中的 B 为 A 中去掉 $n-q$ 列的子矩阵，ii) 中的 B 为 A 中去掉 $m-p$ 行的子矩阵。由引理即可归纳地证明定理。

最后，提出一个问题：

对更一般的 $\min(p+q-m, p+q-n)\le 0$ 情形是否存在某种形式的奇异值交错特征？

参 考 文 献

[1] R. C. Thompson, *Principal submatrices IX: Interlacing inequalities for singular values of submitrices*, Linear Algebra and Its Application, 5(1972), 1-12.

[2] 倪国熙，常用的矩阵理论和方法，上海科技出版社，1984，151.

[3] 庄瓦金，四元数矩阵的特征值与奇异值不等式，数学进展，4(1988)，404-406.

[4] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge, University, Press, Cambridge, 1985.

Some Remarks on Thompson's Theorem and Two Related Consequences

Wu Junliang

(The College of Businness Adminstration of Chongqing University, 400044)

Yi Zhengjun

(Chongqing University, Chongqing 630044)

Abstract

We point out the limitations of some singular value theorems in articles [1-3].

Keywords singular value, interlacing inequality, remarks