

某些四次多项式微分系统的定性研究^{*}

王 树 禾

(中国科学技术大学数学系, 合肥230026)

摘 要 本文研究从化学反应动力学中提出的四次微分系统, 得出其有限奇点的全局渐近稳定性和极限环的存在性与不存在性, 用 PB 规范形方法讨论了 Hopf 分叉

关键词 全局渐近稳定, PB 规范形, Hopf 分叉, 细焦点, 极限环, 旋转向量场

分类号 AM S(1991) 92H10/CCL O29

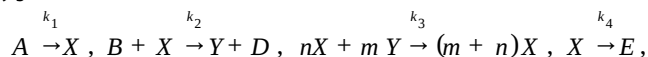
1 问 题

六十年代末, 化学家发现化学振荡现象, 1977年, 化学家 I Prigogine 提出耗散结构理论^[1], 化学与生物化学中的振荡现象越来越受到科学家的关注, 一些数学家也介入了这一研究, 建立了非平衡态化学反应动力学的若干数学模型^[2, 3]; 核心问题是稳定极限环的有无, 它与反应能否持续以及新陈代谢、呼吸、血液循环以及生物钟等生命现象有实质性关联

已经证明^[6], 只有两种中间产物的反应系统, 每个基元反应只有单分子或双分子参与, 则无围绕初等奇点的稳定极限环, 本文只讨论3分子以上的多分子反应

1) 广义 Brussel 振子模型

化学反应机理为



其中初始物质 A, B 和最终产物 D, E 的浓度 $\bar{a}, \bar{b}, \bar{d}, \bar{e}$ 是可控常数, 中间产物 X, Y 的浓度为 $\bar{x}(\bar{t}), \bar{y}(\bar{t})$, $\bar{t}$ 为时间, 于是其数学模型为

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = k_1\bar{a} - (k_2\bar{b} + k_4)\bar{x} + k_3\bar{x}^n\bar{y}^m, \\ \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = k_2\bar{b}\bar{x} - k_3\bar{x}^n\bar{y}^m, \quad m, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

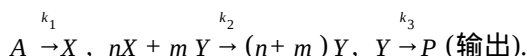
上述方程组可化成

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a - (b+1)x + x^n y^m, \\ \frac{dy}{dt} = bx - x^n y^m. \end{cases} \quad (a, b; n, m)$$

2) 多分子生化反应模型

* 1994年9月14日收到 1997年4月30日收到修改稿

化学反应机理为



其数学模型如下:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 - x^n y^m, \\ \frac{dy}{dt} = \alpha y (x^n y^{m-1}), \end{cases} \quad (\alpha, n, m)$$

[2]研究了 $(a, b; 2, 1)$, [3]研究了 $(\alpha, 1, 2)$, 本文研究 $(a, b; 3, 1)$, $(a, b; 1, 3)$, $(\alpha, 1, 3)$, $(\alpha, 3, 1)$.

2 $(a, b; 3, 1)$ 的奇点

1) 有限奇点

$\forall a \in (0, +\infty)$, b 为参变量, $x, y \geq 0$; 在第一象限内有唯一的有限奇点 $(x_0, y_0) = (a, \frac{b}{a^2})$.

令 $x = \xi + a, y = \eta + \frac{b}{a^2}$, 则 $(a, b; 3, 1)$ 变成

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = (2b-1)\xi + a^3\eta + \left(\frac{3b}{a}\xi^2 + 3a^2\xi\eta + \frac{b}{a^2}\xi^3 + 3a\xi^2\eta + \xi^3\eta\right), \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{d\eta}{dt} = -2b\xi - a^3\eta - \left(\frac{3b}{a}\xi^2 + 3a^2\xi\eta + \frac{b}{a^2}\xi^3 + 3a\xi^2\eta + \xi^3\eta\right), \end{cases} \quad (2)$$

(1), (2) 的线性近似部分的特征根为

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} [2b- (1+ a^3) \pm \sqrt{[2b- (1+ a^3)]^2 - 4a^3}],$$

(i) $b = \frac{1}{2}(1+ a^3)$ 时, (x_0, y_0) 是中心还是焦点需要进一步判定;

(ii) $b \in (0, \frac{1}{2}(1+ a^3 - 2a^{\frac{3}{2}}))$ 时, (x_0, y_0) 是稳定结点;

(iii) $b \in (\frac{1}{2}(1+ a^3 - 2a^{\frac{3}{2}}), \frac{1}{2}(1+ a^3))$ 时, (x_0, y_0) 是稳定粗焦点;

(iv) $b \in (\frac{1}{2}(1+ a^3), \frac{1}{2}(1+ a^3 + 2a^{\frac{3}{2}}))$ 时, (x_0, y_0) 是不稳定粗焦点;

(v) $b \in [\frac{1}{2}(1+ a^3 + 2a^{\frac{3}{2}}), +\infty)$ 时, (x_0, y_0) 是不稳定结点

2) 无穷远奇点

用 Poincare 变换 $x = \frac{1}{z}, y = \frac{u}{z} (z \neq 0)$ 得

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = -auz^4 + (b+1)uz^3 - u^2 + bz^3 - u, \\ \frac{dz}{d\tau} = -az^5 + (b+1)z^4 - uz, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = -az^5 + (b+1)z^4 - uz, \end{cases} \quad (4)$$

其中 $\frac{dt}{dz} = d\tau$ (3), (4) 线性近似系统的特征根是 0 和 -1, 所以 $(u, z) = (0, 0)$ 是 Лияпунов 型奇

点 由(4)知, $z = 0$, 即 u 轴是轨线, 且由(3)知, 在 u 轴上($z = 0$)时 $\frac{du}{d\tau}$ 在原点附近与 u 反号, 故在 u 轴上, 轨的方向是趋于 $(0, 0)$ 的

设 $u = u(z)$ 是下面函数方程的解:

$$\begin{cases} -auz^4 + (b+1)uz^3 - u^2 + bz^3 - u = 0, \\ u(0) = 0, \end{cases} \quad (5)$$

于是对(5), 求 $\frac{d}{dz}, \frac{d^2}{dz^2}, \frac{d^3}{dz^3}$ 得

$$-4auz^3 - au\dot{z}^4 + (b+1)u\dot{z}^3 + 3(b+1)uz^2 - 2uu' + 3bz^2 - u' = 0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & -8au\dot{z}^3 - 12auz^2 - au\ddot{z}^4 + (b+1)u\ddot{z}^3 + 6(b+1)u\dot{z}^2 \\ & + 6(b+1)uz - 2u'^2 - 2uu'' + 6bz - u'' = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & -12au\ddot{z}^3 - 36au\dot{z}^2 - 24auz - au'''\dot{z}^4 + (b+1)u'''\dot{z}^3 + 9(b+1)u\ddot{z}^2 + 18(b+1)u\dot{z} \\ & + 6(b+1)u - 6u'\dot{u}'' - 2uu'''' + 6b - u''' = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

由(6), (7)知, $u'(0) = 0$; 由 $u(0) = u'(0) = 0$ 及(8)知, $u''(0) = 0$; 由 $u(0) = u'(0) = u''(0) = 0$ 及(9)知, $u'''(0) = 6b$; 于是, $u = u(z)$ 的 Maclaurin 级数为

$$u = u(z) = bz^3 + (z^4), \quad (10)$$

其中 (z^m) 表示次数不低于 m 的各项之和 把(10)代入(4)的右端得

$$-az^5 + (b+1)z^4 - uz = z^4 + (z^5), \quad (11)$$

由[7]ch. 4定理2.1或[5]ch. 2定理7.1, $(u, z) = (0, 0)$ 是鞍结点

下面分析 $y = +\infty$ 处的性态 令 $x = \frac{v}{z}, y = \frac{1}{z} (z \neq 0)$,

$$\begin{cases} \frac{dv}{d\tau} = az^4 - (b+1)vz^3 + v^3 - bv^2z^2 + v^4, \\ \frac{dz}{d\tau} = -bvz^4 + v^3z, \end{cases} \quad (12)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = -bvz^4 + v^3z, \quad (13)$$

其中 $\frac{dt}{dz} = d\tau$, 求得(引用[6]中记号)

$$\Theta(\theta) = -\sin\theta\cos^3\theta, R(\theta) = \cos^4\theta$$

$\theta = 0$ 是 $\Theta(\theta) = 0$ 的一重根, 且在 $\theta = 0$ 处 $\Theta R = -1$, 所以沿 $\theta = 0$ 方向趋于 $(0, 0)$ 的轨线是唯一的, 由(13), $z \equiv 0$ 即 v 轴是轨, 故此唯一轨线即 v 轴, 由(12), v 轴正半轴做为轨, 其走向向右(与轴向一致); 又 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $\Theta(\theta) \neq 0$, 这些方向上 $(\theta \in (0, \frac{\pi}{2}))$ 无轨线趋于 $(0, 0)$; 而 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, 由(13), $\frac{dz}{d\tau} = 0$, 由(12), $\frac{dv}{d\tau} > 0$, 所以在正半 z 轴上, 方向场方向向右, 指向第一象限内部 综上所述, 无穷远点处没有“汇”.

3 $(a, b; 3, 1)$ 的 Hopf 分叉

下面用 Poincare-Birkhoff 的 PB 规范形分法判别 $b = \frac{1}{2}(1+a^3)$ 时 $(a, b; 3, 1)$ 在第一象限的奇点是中心还是细焦点, 为此, 令

$$\begin{cases} X = 2\sqrt{2} b\xi + \sqrt{2} (2b-1)\eta \\ Y = \sqrt{2} a^{\frac{3}{2}}\eta \\ \xi = mX + nY, \\ \eta = lY, \end{cases}$$

其中

$$m = \frac{1}{\sqrt{2} (1+a^3)}, \quad n = \frac{-a^{3/2}}{\sqrt{2} (1+a^3)}, \quad l = \frac{1}{\sqrt{2} a^{3/2}}$$

仍用 x, y 记 X, Y

$$\begin{cases} x^\circ = \beta y + \sqrt{2} \mathcal{Q}(x, y), \\ y^\circ = -\beta y - \sqrt{2} a^{\frac{3}{2}} \mathcal{Q}(x, y), \end{cases}$$

其中 $\beta = a^{\frac{3}{2}}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(x, y) = & (mx + ny) \left[\frac{3bm}{a}x + \left(\frac{3bn}{a} + 3a^2l \right)y + \frac{bm^2}{a^2}x^2 + \left(\frac{2bm n}{a^2} + 3am l \right)xy \right. \\ & \left. + \left(\frac{bn^2}{a^2} + 3an l \right)y^2 + \dots \right], \end{aligned}$$

“...”表示高于2次的项, 令

$$\begin{aligned} f(x, y) = & -\frac{\sqrt{2}}{\beta} (mx + ny) \left[\frac{3bm}{a}x + \left(\frac{3bn}{a} + 3a^2l \right)y + \frac{bm^2}{a^2}x^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{2bm n}{a^2} + 3am l \right)xy + \left(\frac{bn^2}{a^2} + 3an l \right)y^2 \right], \end{aligned}$$

$$g(x, y) = -a^{\frac{3}{2}} f(x, y).$$

于是可以算出:

$$\begin{aligned} g_{xx}(0, 0) &= \sqrt{2} \frac{6bm^2}{a}, & g_{xxx}(0, 0) &= \sqrt{2} \frac{6bm^3}{a^2}, \\ g_{xyy}(0, 0) &= \sqrt{2} \left(\frac{6bm^2 n}{a^2} + 6am^2 l \right), & g_{xxy}(0, 0) &= 0, \\ g_{yyy}(0, 0) &= \sqrt{2} \left(\frac{6bm n^2}{a^2} + 12am n l \right), & g_{yy}(0, 0) &= \sqrt{2} \left(\frac{6bn^2}{a} + 6a^2 n l \right), \\ g_{yyy}(0, 0) &= \sqrt{2} \left(\frac{6bn^3}{a^2} + 18an^2 l \right). \end{aligned}$$

记

$$\alpha = [f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy} + f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}](x, y) = (0, 0), \quad (14)$$

由 PB 规范形理论知, $\alpha > 0$ 时, $(0, 0)$ 是稳定细焦点, $\alpha < 0$ 时, $(0, 0)$ 是不稳定细焦点; 把上述 $g_{xx}(0, 0)$ 等数据代入 (14) 得

$$\alpha = \frac{1}{a^{3/2} (1+a^3)^2} (3a^{-2} + 6a + 3a^4) > 0,$$

故 $(a, b; 3, 1)$ 的奇点是稳定细焦点

由 Hopf 分叉定理, 在奇点附近, 当 $b \in (\frac{1}{2}(1+a^3), \frac{1}{2}(1+a^3) + \epsilon)$ 时, $\epsilon > 0$ 适当小, 有稳定

极限环生出, 且当 $b \rightarrow \frac{1}{2}(1+a^3)+0$ 时, 这种极限环直径趋于零.

4 $(a, b; 3, 1)$ 的旋转向量场和极限环的存在性与不存在性

令 $x = \xi + a, y = \eta - \frac{b}{a^2}, \bar{\xi} = \xi, \bar{\eta} = \eta$ 则

$$\begin{cases} \dot{\bar{\xi}} = a - (b+1)(\xi+a) + (\xi+a)^3(\eta - \frac{b}{a^2}), \\ \dot{\bar{\eta}} = -\xi, \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{vmatrix} a - (b_1+1)(\xi+a) + (\xi+a)^3(\eta - \frac{b_1}{a^2}) - \xi \\ a - (b_2+1)(\xi+a) + (\xi+a)^3(\eta - \frac{b_2}{a^2}) - \xi \end{vmatrix} = \frac{\xi^2}{a^2}(b_2 - b_1)(\xi+a)(\xi+2a),$$

而 $\xi+a = x \geq 0$, 故上式 $b_2 > b_1$ 时常正, 在 $\bar{\xi}\bar{\eta}$ 平面与 xy 平面第一象限对应的区域 **D** 上是关于参数 b 的旋转向量场 而 $\bar{\xi}\bar{\eta}$ 平面上 (15), (16) 的轨线与 $(a, b; 3, 1)$ 的轨线拓扑同胚

由于 $b > \frac{1}{2}(1+a^3)$ 时, 有限奇点是不稳定结点或焦点, 而 xy 平面第一象限无穷远点无汇,

由 Poincare 环域定理, 对于 $\forall a \in (0, +\infty), b > \frac{1}{2}(1+a^3)$ 时, 多项式系统 $(a, b; 3, 1)$ 存在稳定的极限环 不难看出极限环是负向(顺时针)的, 所以在旋转向量场中, b 由 $\frac{1}{2}(1+a^3)$ 增大时, 稳定负向极限环直径由零单调扩大, 又由旋转向量场中闭轨不相交定理, 知 $b \in (0, \frac{1}{2}(1+a^3)]$ 时, $(a, b; 3, 1)$ 无闭轨, 进而可知, 当 $b \in (0, \frac{1}{2}(1+a^3)]$ 时, 有限奇点是全局渐近稳定的

总结2—4各节得出下面的定理:

定理1 $\forall a \in (0, +\infty), b \in (0, \frac{1}{2}(1+a^3)]$ 时, $(a, b; 3, 1)$ 无闭轨, 奇点 $(a, \frac{b}{a^2})$ 在第一象限是全局渐近稳定的; $\forall a \in (0, +\infty), b \in (\frac{1}{2}(1+a^3), +\infty)$ 时, $(a, b; 3, 1)$ 存在负向的稳定极限环, 此极限环当 b 增大时, 其直径由零单调扩大

5 $(a, b; 1, 3), (\alpha, 3, 1)$ 和 $(\alpha, 1, 3)$

现对 $(a, b; 1, 3), (\alpha, 3, 1)$ 和 $(\alpha, 1, 3)$ 的奇点与无穷远奇点、Hopf 分叉、旋转向量场、中心与细焦点的判定等进行了与2—4节相似的研究, 得出下面的结论:

定理2 $(a, b; 1, 3)$ 无闭轨, 在第一象限, 唯一的有限奇点 $(a, \sqrt[3]{b})$ 是全局渐近稳定的结点

定理3 $(\alpha, 3, 1)$ 无闭轨, 在第一象限, 唯一的有限奇点 $(1, 1)$ 是全局渐近稳定的, $\alpha \in (0, \frac{3}{4}]$ 时, $(1, 1)$ 是稳定结点, $\alpha \in (\frac{3}{4}, +\infty)$ 时, $(1, 1)$ 是稳定焦点

定理4 $\forall \alpha \in (0, \frac{1}{2}]$, $(\alpha, 1, 3)$ 无闭轨; $\exists \alpha^* \in (\frac{1}{2}, 5)$, $\alpha \in [\alpha^*, +\infty)$ 时, $(\alpha, 1, 3)$ 无闭轨; $\alpha \in (\frac{1}{2}, \alpha^*)$ 时, $(\alpha, 1, 3)$ 有正向稳定极限环, 此极限环当 α 增大时, 其直径由零单调增大

参 考 文 献

- [1] G. Nicolis and I. Prigogine, *Self-organization in Nonequilibrium Systems*, John Wiley, 1977.
- [2] 秦元勋、曾宪武, 生物化学中布鲁塞尔振子方程的定性研究, 科学通报, 25(1980), 337- 339
- [3] 周建莹、张锦炎、曾宪武, 生化反应中一类非线性方程的定性研究, 应用数学学报, Vol 5, No. 3, 1982
- [4] J. Higgins, Oscillatory reaction Ind and Engchem, 5a(1967).
- [5] 张芷芬、丁同仁等, 微分方程定性理论, 科学出版社, 1985
- [6] 陆启韶, 常微分方程的定义方法和分叉, 北京航空航天大学出版社, 1989
- [7] 秦元勋, 微分方程所定义的积分曲线, 上册, 科学出版社, 1959

A Qualitative Analysis of Some Polynomial Differential Systems of Degree 4

Wang Shuhe

(Dept. of Math., USTC)

Abstract

In this paper, we study some polynomial differential systems of degree 4, discuss

- (i) the asymptotic stability in the large of finite singular points;
- (ii) the Hopf bifurcations;
- (iii) the existence and nonexistence of limit cycles

Keywords the asymptotic stability of the large, PB-normal form, Hopf bifurcation, weak focus, limit cycle