# 非线性奇异扩散方程的第二初边值问题*

潘佳庆 雷英果
(集美大学师范学院数学系, 厦门361005) (福州大学数学系, 福州350002)

**摘 要** 讨论了非线性奇异扩散方程的第二初边值问题, 证明了存在唯一的光滑解, 且解关于初值是连续依赖的. 同时还简洁地得到解的渐近性质: $t^l|u-\overline{u_0}|\to 0,\ 0<l<\frac{1}{2}$.

**关键词** 非线性, 奇异扩散, 第二初边值
**分类号** AMS(1991) 35K/CCL O175.26

## 1 引 言

近几十年来, 关于拟线性抛物方程的研究已有了许多成果. 但是, 对非线性奇异扩散方程的讨论, 国内外尚不多见, 这类方程有其鲜明的物理意义. 比如方程

$$u_t=(u^{m-1}u_x)_x, \tag{1.1}$$

当 $m=\frac{1}{2}$ 时描述了等离子体的热扩散过程; $m=0$ 时描述了热电子云的膨胀过程, 而当 $m=-1$ 时则描述了固态氢中的热传导. 这些问题的一个共同特点是: 扩散速度可以非常快, 基于这样的物理背景, [1]讨论了(1.1)在 $-1<m\leq 0$ 时的 Cauchy 问题, [2]则进一步讨论了

$$u_t=(u^{m-1}u_x)_x+(u^n)_x\ (-1<m\leq 0,\ n>1) \tag{1.2}$$

的 Cauchy 问题. 得到的主要结果是: 存在唯一的光滑解, 以及解的关于初值连续依赖性和解的渐近性等.

本文讨论如下的奇异热扩散问题:

$$\begin{cases} u_t=a(u)_{xx}, & (1.3)\\ u\big|_{t=0}=u_0,\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0,1}=0, & (1.4)\end{cases}$$

其中, $u$ 表示温度, 第二边界条件的意义是: 假定容器固壁绝热, 根据热力学第三定律, 应有 $u_0>0$. 放宽对 $u_0$ 的限制, 仅要求:

(H1) $0\leq u_0\leq M$, $\overline{u_0}=\int_0^1 u_0(x)\,dx>0$, $M$ 是一正数.

(H2) $a(X)\in C^{2+\alpha}(0,M)$, $\alpha>0$, 当 $X\in(0,2M)$ 时, $a(X)>0$, $a'(X)>0$, 且 $a'(0)=+\infty$, 存在正数 $c,q,q>1$, 使得 $\dfrac{(a')^2-qaa''}{a\,a'^{2/q}}\geq C$.

在(H2)的假设之下, 容易验证, 当 $0<m<1$ 时, 方程(1.1)为(1.3)的特例.

* 1994年9月6日收到. 1997年4月25日收到修改稿.

## 2　解的存在性

对于 $0<\delta<M$，作 $u_{0,\delta}=\delta+\int J_\delta(x-y)u_0(y)dy$，$J(x)$ 是光滑算子. 令 $\varphi(r)=C^{2+\alpha}$，使得

$$\varphi(r)=\begin{cases}a(r), & r\ge\delta,\\ \text{连续}, & 0\le r\le\delta,\\ 2a(\delta), & r\le 0.\end{cases}\tag{2.1}$$

记 $Q_T=(0,1)\times(0,T)$. 由[3]可知，如下的问题

$$\begin{cases}w_t=\varphi(w)_{xx}, & (2.2)\\ w\big|_{t=0}=u_{0,\delta},\quad w_x\big|_{x=0,1}=0 & (2.3)\end{cases}$$

存在唯一的解 $w_\delta\in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(Q_T)$，$0<\alpha<1$. 由极大值原理[4]，$\delta\le w_\delta\le M+\delta$，再由(2.1)知，$w_\delta$ 是(1.4)在条件

$$u\big|_{t=0}=u_{0,\delta},\quad u_x\big|_{x=0,1}=0\tag{2.4}$$

之下的解. 记 $u_\delta=w_\delta$.

**引理1**　存在正常数 $c_0$，对于任意的 $\delta$，$0<\delta<M$，都有

$$\left|(u_\delta)_x\right|\le c_0\frac{1}{t^{1/2}}.\tag{2.5}$$

**证明**　作变换 $v^q=a(u_\delta)$. 于是，有

$$v_t=a'v_{xx}+(q-1)\frac{a'}{v}v_x^2.\tag{2.6}$$

将(2.6)关于 $x$ 求导，记 $v_x=p$，两端再乘以 $p$，则

$$\frac{1}{2}[(p^2)_t-a'(p^2)_{xx}]+a'(p_x)^2-[q\frac{a''}{a}v^{q-1}+2(q-1)\frac{a'}{v}]p^2p_x$$
$$=(1-q)\frac{(a')^2-qaa''}{a v^2}p^4.\tag{2.7}$$

由(H2)知，$(1-q)\frac{(a')^2-qaa''}{a v^2}\le(1-q)c$，故若有函数 $Q^2$，$Q$ 和 $P$ 满足相同的定解条件，使得

$$\frac{1}{2}[(Q^2)_t-a'(Q^2)_{xx}]+a'(Q_x)^2-[q\frac{a''}{a}r+2(q-1)\frac{a'}{v}]Q^2Q_x=(1-q)cQ^4,\tag{2.8}$$

则由比较定理[5]，便有 $P^2\le Q^2$. 又因为 $Q^2=\frac{1}{2(q-1)ct}$ 是(2.8)在条件 $Q^2\big|_{t=0}=+\infty$ 下的解，故仍由比较定理：

$$P^2\le\frac{1}{2(q-1)ct},\tag{2.9}$$

得到

$$\left|(u_\delta)_x\right|\le q\frac{1}{[2c(q-1)t]^{1/2}a'a^{1/q-1}}.\tag{2.10}$$

由(H2)可知，$a^{1-1/q}$ 在 $(0,2M)$ 上单调增，从而 $(a'a^{1/q-1})^{-1}$ 在 $0\le u_\delta\le 2M$ 上有界. 即有正数 $c_0$，$c_0$ 与 $\delta,x,t$ 无关，使 $\left|u_{\delta x}\right|\le\frac{c_0}{t^{1/2}}$. 引理证毕.

**定理1**　在条件 H1，H2之下，对任意的 $T>0$，存在(1.4)的解

$$u(x,t)\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T),\ 0<u(x,t)\leq M,\ \int u(x,t)dx=\overline{u_0},\ 0<t<T.$$

**证明** 对于 $0<\delta<M$ 有序列 $\{u_\delta\}$, 由(2.5)以及 Arzela 定理可知, 任给 $\tau>0$, 当 $t\geq\tau$ 时, 有 $\{u_\delta\}$ 的子列, 无妨仍记为 $\{u_\delta\}$, $u_\delta\to u$, 显然 $u(x,t)$ 关于 $x$ 连续, 且 $0\leq u\leq M$, 以及

$$\int u(x,t)dx=\overline{u_0},\quad \tau\leq t<T. \tag{2.11}$$

由(2.11)可知, 当 $\tau<t<T$ 时, 在(0, 1)中至少存在一点 $x_0$, 使得 $u(x_0,t)\geq\overline{u_0}$, 从(2.9)可知

$$\left|a^{1/q}(u_\delta(x,t))\right|\leq[2c(q-1)t]^{-1/2}+\left|a^{1/q}(u_\delta(x_0,t))\right|.$$

令 $\delta\to0$, $a^{1/q}(u_\delta(x_0,t))\to a^{1/q}(u(x_0,t))$, 故 $\left|a^{1/q}(u(x,t))\right|$ 有界.

$$\left|a^{1/q}(u(x,t))\right|\leq[2c(q-1)t]^{-1/2}+\left|a^{1/q}(u(x_0,t))\right|.$$

因此由 H2, 存在正数 $C$, 使得 $u(x,t)\geq c$, $(x,t)\in(0,1)\times[\tau,T)$. 由[6]中引理5得到, $u(x,t)$ 在 $(0,1)\times[\tau,T)$ 上关于 $x,t$ 都连续. 再利用[6]中定理3的证明可知道, $u(x,t)\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}((0,1)\times[\tau,T))$, 且 $u$ 满足(1.3). 又因 $\tau>0$ 是任意的, 故在 $Q_T$ 上 $u$ 满足(1.3), 且 $u\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)$. 证毕.

## 3 解的唯一性和关于初值的连续依赖性

**引理2** 设 $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ 是(1.3), (1.4)的相应于初值 $u_{10}$, $u_{20}$ 的两个解, $0<s<t<T$, 则

$$\int[u_1(x,t)-u_2(x,t)]_+dx\leq\int[u_1(x,s)-u_2(x,s)]_+dx. \tag{3.1}$$

**证明** 记 $a(u_1)-a(u_2)=w$, 并设

$$p_\epsilon(x)=\begin{cases}\exp\left[-\dfrac{1}{(\frac{x}{\epsilon})^2}\exp\left(-\dfrac{1}{(1-\frac{x}{\epsilon})^2}\right)\right], & 0<x<\epsilon,\\ 0, & x\leq0,\\ 1, & x\geq\epsilon.\end{cases}$$

显然, $p_\epsilon(x)\in C^\infty(R^1)$, $p_\epsilon'\geq0$. 故

$$\int[u_1(x,t)-u_2(x,t)]_t p_\epsilon(w)dx=-\int w_x^2p_\epsilon' dx. \tag{3.2}$$

令 $\epsilon\to0$, $p_\epsilon(w)\to\mathrm{sign}(w)$. $\mathrm{sign}(w)$ 是符号函数, 当 $w>0$ 时 $\mathrm{sign}(w)=1$, $w<0$ 时 $\mathrm{sign}(w)=0$. 由于 $a'(X)>0$, 故 $w\geq0$ 等价于 $u_1-u_2\geq0$, 于是由(3.2)

$$\frac{d}{dt}\int[u_1(x,t)-u_2(x,t)]_+dx\leq0,$$

$$\int[u_1(x,t)-u_2(x,t)]_+dx\leq\int[u_1(x,s)-u_2(x,s)]_+dx.$$

证毕.

同理, 还可以有

$$\int[u_2(x,t)-u_1(x,t)]_+dx\leq\int[u_2(x,s)-u_1(x,s)]_+dx. \tag{3.3}$$

合并(3.1)、(3.3)得到, 对于 $0<s<t<T$, 有

$$\int_0^1 |u_1(x,t) - u_2(x,t)| dx \le \int_0^1 |u_1(x,s) - u_2(x,s)| dx, \tag{3.4}$$

令 $s\to 0$, 则

$$\int_0^1 |u_1(x,t) - u_2(x,t)| dx \le \int_0^1 |u_{10}(x) - u_{20}(x)| dx. \tag{3.5}$$

若 $u_{10}\equiv u_{20}$, 则从(3.5)可知 $u_1\equiv u_2$, 故有

定理2　在假设(H1), (H2)之下, 定理1中所得到的解是唯一的

由(3.5)还可知, 若 $u_{10}$, $u_{20}$在$L^1$范数的意义下相差很小, 则对应的解也相差很小. 即有

定理3　(1.3), (1.4)的解在$L^1$范数的意义下是关于初值连续依赖的

## 4　当 $t\to\infty$时解的渐近性

关于抛物方程的第二初边值问题解的渐近性质, 已有了一些研究成果, 如[7]讨论了方程 $u_t = D\Delta u + f(x,t,u)$第二初边值问题解的渐近性质, 得到的结果是

$$\|u(x,t) - \bar{u}\| \to 0, \quad t\to\infty, \tag{4.1}$$

此处 $\bar{u} = \frac{1}{\Omega}\int_\Omega u(x,t)dx$. [8]讨论了退化抛物方程 $u_t = a(u)_{xx} - f(u)$ 的相同的初边值问题, 也得到了(4.1). 本文利用引理1来直接讨论解当 $t\to\infty$时的渐近性态, 得到比(4.1)更强的结果, 而证明过程更为简洁

由[9]存在正数 $c_2$, 使得

$$\|u(x,t) - \bar{u}(t)\| \le c_2\|u_x\|, \tag{4.2}$$

此处 $\bar{u} = \int_0^1 u(x,t)dx$, $\|\cdot\|$为$L^2$范数 由嵌入定理, 有

$$|u(x,t) - \bar{u}(t)| \le c_3(\|u(x,t) - \bar{u}(t)\| + \|u_x\|) \le c_3(1+c_2)\|u_x\| \tag{4.3}$$

成立, $c_3$是一正数 由于(2.5)中的 $c_0$与 $\delta$无关, 故有$\|u_x\|\le c_0\frac{1}{t^{1/2}}$. 又因为 $\bar{u}(t) = \bar{u}_0$, 故

$$|u(x,t) - \bar{u}_0| \le c_0c_3(1+c_2)\frac{1}{t^{1/2}}. \tag{4.4}$$

于是得到解的渐近性质如下:

定理4　任给 $l$, $0< l< \frac{1}{2}$, 都有 $t^l|u(x,t) - \bar{u}_0|\to 0$, 当 $t\to\infty$关于 $x\in[0,1]$一致成立

## 5　结　语

试将奇异扩散方程和退化抛物方程解的性质作一比较

一般地, 对退化抛物方程往往只能求得广义解, 而奇异扩散方程的解更为光滑, 甚至是 $C^\infty$的[1], [2]. 产生这种差别的原因正在于两种方程的物理背景完全不同 后者描述了一类快扩散问题, 如液氦中的热传导. 根据Mcleman 和 Keeson 的实验, 对液氦(HeII)加热时, 几乎不产生沸腾, 这表明 HeII内部温度梯度极小, 温度函数 $u(x,t)$是非常均匀、光滑的[10]. 前一种方程常描述地下水、石油等流体通过多孔介质时流动的规律 由于液体渗透速度是有限的, 在任何时刻, 介质中各点的含水(或油)量可有明显的差异, 因而方程的解不会太光滑 从数学上看, 在奇异扩散方程中 $u$ 表示温度, 故热力学第三定律断定: $u> 0$. 而 $u> 0$时方程的系数是光滑的,

甚至是 $C^\infty$ 的, 由[4]可知, 抛物方程解的光滑性和方程系数的光滑性相同, 故后者解的光滑性较强. 而对于前者, 因为不能保证恒有 $u>0$, 故在整体区域上, $u$ 的光滑性不如后者, 但在 $u>0$ 的局部范围内, 仍有可能有 $u\in C^\infty$[6]. 正是由于奇异扩散方程解的光滑性较强, 才导致了解具有较好的其它性质. 如关于初值连续依赖; $t\to\infty$ 时 $t^\alpha u\ (\alpha>0)$ 关于 $x\in R^1$ 一致逼近于零[2], $t^\alpha\left|u-\overline{u_0}\right|$ 一致逼近于零等.

## 参 考 文 献


[1] J. R. Estenban, A. Rodriguez and J. L. Vazquez, *A nonlinear heat equation with singular diffusivity*, Commun in Partial Differential Equations, 13: 8(1988), 985- 1039.

[2] 潘佳庆、白宣怀, 具奇扩散的非线性热方程的 Cauchy 问题, 数学物理学报(1992), 增刊, 117—118.

[3] D. A. Ladyshenskaya, V. A. Solounikov and N. N. Uraltseva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Am. Math. Soc. Providence, R. I, 1968.

[4] A. 弗里德曼, 抛物型偏微分方程, 科学出版社, 1984.

[5] 叶其孝、李正元, 反应扩散方程引论, 北京工业学院数学系, 1988年1月.

[6] B. H. Gilding, L. A. Peletier, *The Cauchy problem for an equation in the theory of infiltration*, Arch. Rat. Mech. Anal, 61: 2(1976), 127- 140.

[7] Su Yu, *Asymptotic Behavion of solutions of heterogeneous nonlinear reacting and diffusing systems*, Nonlinear Analysis, 9: 3(1985), 275- 288.

[8] 潘佳庆, 一类非线性退化抛物方程解的存在性及渐近性, 空军气象学院学报, 1991, 47- 56.

[9] E. Conway, D. Hoff and J. Smoller, *Large time behavior of solutions of systems of nonlinear reaction-diffusion equations*, SIAM. J. Appl Math., 35(1978), 1- 16.

[10] 管惟炎, 宏观量子现象——超流动性, 物理, Vol 14, No. 4.


# The Second Initial and Boundary Value Problem of a Nonlinear Singular Diffusion Equation


*Pan Jiaqing*

(Dept. of Math., Teachers' College, Jimei Univ, Xiamen 361005)

*Lei Yinguo*

(Dept of Math., Fuzhou Univ, 350002)



**Abstract**

In this paper, the second initial and boundary value problem of a nonlinear singular diffusion equation is discussed. We show that there exists only one smooth solution which depends on the initial data continuously and $t^l\left|u-\overline{u_0}\right|\to 0$ as $t\to\infty$.



**Keywords** nonlinear, singular diffusion, second initial and boundary value