第17卷第4期 1997年11月 数学研究与评论 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Vol. 17 No. 4 Nov. 1997

二元Thiele型向量有理插值的误差公式*

顾 传 青

(上海大学理学院, 上海200072)

摘 要 借助于Samelson广义逆, 文[1]首次讨论了多元向量有理插值问题. 本文得到了二元Thiele型向量有理插值的一个精确的误差公式.

关键词 多元, 向量值, 有理插值, 误差公式

分类号 AMS(1991) 65D/CCL O241.5

文[1]利用向量的Samelson广义逆构造了二元Thiele型向量分叉连分式, 从而建立了矩形网格上的二元向量有理插值, 本文得到了它的一个精确的误差公式.

记 $\Pi^{n,m}=\{(x_i,y_j): i=1,2,\cdots,n, j=1,2,\cdots,m\}$是$\Delta=(a,b)\times(c,d)\subset R^2$中的一个矩形网格, 对$\Pi^{n,m}$中每个点$(x_i,y_j)$, 给定有限值插值向量$\vec{v}_{i,j}=\vec{v}(x_i,y_j)\in C^d$, $i=1,2,\cdots,n$, $j=1,2,\cdots,m$. 向量$\vec{v}$的Samelson广义逆定义为

$$\vec{v}^{-1}=\vec{v}^*/|\vec{v}|^2,\ \vec{v}\neq 0,\ \vec{v}^* \text{ 是 } \vec{v} \text{的共轭向量} \tag{1}$$

利用(1)可以递推地定义:

$$\vec{b}_{0,0}=\vec{v}_{0,0},\quad \vec{b}_{0,01\cdots k}=(y_{k+1}-y_k)/(\vec{b}_{0,01\cdots(k-2)k}-\vec{b}_{0,01\cdots(k-1)}), \tag{2}$$

$$\vec{b}_{01\cdots l,0}=(x_{l+1}-x_l)/(\vec{b}_{01\cdots(l-2)l,0}-\vec{b}_{01\cdots(l-1),0}), \tag{3}$$

$$\vec{b}_{01\cdots l,01\cdots k}=(y_{k+1}-y_k)/(\vec{b}_{01\cdots l,01\cdots(k-2)k}-\vec{b}_{01\cdots l,01\cdots(k-1)}),\ k\geq 1, \tag{4}$$

其中记$\vec{b}_{l,k}=\vec{b}_{01\cdots l,01\cdots k}=\vec{b}_{l,k}(x_1\cdots x_l, y_1\cdots y_k)$.

设$\vec{v}(x,y)$是定义在$\Delta=(a,b)\times(c,d)\subset R^2$上的二元向量函数, 若对于$\Pi^{n,m}\subset\Delta$, $\vec{b}_{l,k}$存在(即为有限值), 则称它为$\vec{v}(x,y)$的第(l,k)阶部分反差商. 文[1]利用广义逆(1)和递推公式(2)-(4), 得到了二元向量有理插值公式如下

$$\vec{R}_{n-1,m-1}(x,y)=\frac{\vec{P}_{n-1,m-1}(x,y)}{Q_{n-1,m-1}(x,y)}=\vec{B}_0(y)+\frac{x-x_1}{\vec{B}_1(y)}+\cdots+\frac{x-x_{n-1}}{\vec{B}_{n-1}(y)}, \tag{5}$$

其中

$$\vec{B}_i(y)=\vec{b}_{i,0}+\frac{y-y_1}{\vec{b}_{i,1}}+\cdots+\frac{y-y_{m-1}}{\vec{b}_{i,m-1}},\quad i=0,1,\cdots,n-1 \tag{6}$$

满足插值条件

$$\vec{R}_{n-1,m-1}(x_i,y_j)=\vec{v}_{i,j},\quad i=1,2,\cdots,n,\ j=1,2,\cdots,m. \tag{7}$$

这里$Q_{n-1,m-1}(x,y)$是实多项式, $\vec{P}_{n-1,m-1}(x,y)$是d维向量值多项式.

* 1994年6月27日收到. 1997年3月24日收到修改稿. 国家自然科学基金资助项目.

引理1[2] 设

$$\vec{R}(x)=\frac{\vec{N}(x)}{D(x)}=\vec{b}_0+\cfrac{x-x_1}{\vec{b}_1+\cdots+\cfrac{x-x_{n-1}}{\vec{b}_{n-1}}}\tag{8}$$

则当 n 是偶数时，$\vec{R}(x)$ 是 $[n/n]$ 型的；则当 n 是奇数时，$\vec{R}(x)$ 是 $[n/(n-1)]$ 型的，其中 $[s/t]$ 表示分子是次数为 s 的向量多项式，分母是次数为 t 的实多项式

与 $\vec{R}_{n-1,m-1}(x,y)$ 一起，定义

$$\vec{R}_{n-1,m}(x,y)=\frac{\vec{P}_{n-1,m}(x,y)}{Q_{n-1,m}(x,y)}=\vec{L}_0(y)+\cfrac{x-x_1}{\vec{L}_1(y)+\cdots+\cfrac{x-x_{n-1}}{\vec{L}_{n-1}(y)}},\tag{9}$$

其中 $\vec{L}_i(y)=\vec{b}_{i,0}+\cfrac{y-y_1}{\vec{b}_{i,1}+\cdots+\cfrac{y-y_{m-1}}{\vec{b}_{i,m-1}+\cfrac{y-y_m}{\vec{b}_{i,m}}}}$，$i=0,1,\cdots,n-1$.

由引理1，对照(8)与(5)，(8)与(9)得

引理2 则当 n 是偶数时，$\vec{R}_{n-1,m-1}(x,y)$，$\vec{R}_{n-1,m}(x,y)$ 仅关于 x 的次数是 $[(n-1)/(n-2)]$ 型的；则当 n 是奇数时，$\vec{R}_{n-1,m-1}(x,y)$，$\vec{R}_{n-1,m}(x,y)$ 仅关于 x 的次数是 $[(n-1)/(n-1)]$ 型的

引理3[3] 在(9)中设 $D(x_i)\neq 0$，则方程组 $d^k/dx^k[\vec{N}(x_i)/D(x_i)]=\vec{v}^{(k)}(x_i)$ 等价于

$$\vec{N}^{(k)}(x_i)=d^k/dx^k[D(x_i)\vec{v}(x_i)],\ k=0,1,\cdots,n.$$

记 $w_s(z)=\prod_{i=1}^{s}(z-z_i)$；$D_z^t=\partial^t/\partial z^t$，$z=x,y$. 若 $\vec{v}(x,y)$ 在 $\Delta=(a,b)\times(c,d)$ 上 $n+m$ 次连续可微的，则记 $\vec{v}(x,y)\in D_\Delta^{n+m}$. 下面简记 $Q(x,y)=Q_{n-1,m-1}(x,y)Q_{n-1,m}(x,y)$，$\vec{\Phi}(x,y)=Q(x,y)[\vec{v}(x,y)-\vec{R}_{n-1,m-1}(x,y)]$. 下面给出本文的主要结果

定理（误差公式） 设 $\vec{v}(x,y)\in D_\Delta^{n+m}$，且对 $\Pi^{n,m}\subset\Delta$，$\vec{v}(x,y)$ 的所有部分反差商都存在，则必有 $(\xi,\eta)\in\Delta$，成立

$$\vec{v}(x,y)-\vec{R}_{n-1,m-1}(x,y)=\frac{1}{Q(x,y)}\Big\{\frac{w_n(x)}{n!}D_x^n[\vec{\Phi}(\xi,y)]+\frac{w_m(y)}{m!}D_y^m[\vec{\Phi}(x,\eta)]-\frac{w_n(x)w_m(y)}{n!m!}D_{x,y}^{n+m}[\vec{\Phi}(\xi,\eta)]\Big\}.\tag{10}$$

证明 设

$$\vec{f}(u,y)=[Q_{n-1,m}(u,y)\vec{v}(u,y)-\vec{P}_{n-1,m}(u,y)]w_n(x)-[Q_{n-1,m}(x,y)\vec{v}(x,y)-\vec{P}_{n-1,m}(x,y)]w_n(u),\tag{11}$$

由Rolle定理，并注意到 $Q_{n-1,m}(x_i,y_j)\neq 0$，根据引理3得 $D_u^n\vec{f}(u,y)]_{u=\xi}=\vec{0}$，但据引理2又得 $D_u^n[\vec{P}_{n-1,m}(u,y)]=\vec{0}$，由此从(11)得

$$[Q_{n-1,m}(x,y)\vec{v}(x,y)-\vec{P}_{n-1,m}(x,y)=w_n(x)D_x^n[Q_{n-1,m}(x,y)\vec{v}(x,y)]_{x=\xi}/n!.\tag{12}$$

同样由引理2可得

$$D_x^n[\vec{\Phi}(\xi,y)]=Q_{n-1,m-1}(x,y)D_x^n[Q_{n-1,m}(x,y)\vec{v}(x,y)]_{x=\xi},\tag{13}$$

比较(12)与(13)得

$$\vec{v}(x,y)-\vec{R}_{n-1,m}(x,y)=w_n(x)D_x^n[\vec{\Phi}(\xi,y)]/n!Q(x,y).\tag{14}$$

由于对任意的 $x\in(a,b)$ 成立，$\vec{R}_{n-1,m}(x,y_j)-\vec{R}_{n-1,m-1}(x,y_j)=\vec{0}$，$j=1,2,\cdots,m$，故必存在

$\eta\in(c,d)$使

$$\begin{aligned}&\vec{R}_{n-1,m}(x,y)-\vec{R}_{n-1,m-1}(x,y)\\&=w_m(y)\{D_y^m[Q(x,y)(\vec{R}_{n-1,m}(x,y)-\vec{v}(x,y))]_{y=\eta}/m!Q(x,y)\\&\quad+D_y^m[Q(x,y)(\vec{v}(x,y)-\vec{R}_{n-1,m-1}(x,y)]_{y=\eta}\}.\end{aligned} \tag{15}$$

在(15)的右端第一项应用(14)可推出

$$\begin{aligned}\vec{R}_{n-1,m}(x,y)-\vec{R}_{n-1,m-1}(x,y)&=w_m(y)D_y^m[\vec{\Phi}(x,\eta)]/m!Q(x,y)\\&-w_n(x)w_m(y)D_{x,y}^{n+m}[\vec{\Phi}(\xi,\eta)]/n!m!Q(x,y).\end{aligned} \tag{16}$$

由(14)和(16)定理得证

事实上, 若在误差公式(10)中设 $d=1$, 则可得到二元 Thiele 型数量有理插值的误差公式[4]

参 考 文 献

[1] 朱功勤, 顾传青, 二元 Thiele 型向量有理插值, 计算数学, 12(1990), 293-301.

[2] P. R. Graves-Morris, *Vector valued rational interpolants* Ⅰ, Numer. Math., 42(1983), 331-348.

[3] 朱功勤, 顾传青, 向量 Salzer 定理, 数学研究与评论, 10(1990), 523-526.

[4] W. Siemaszko, *Thiele-type branched continued fraction for two-variable functions*, J. Comput. Appl. Math., 9(1983), 137-153.

An Error Formula for Bivariate Thiele-Type Vector Valued Rational Interpolants

Gu Chuanqing

(Science College of Shanghai University, Shanghai)

Abstract

In this paper, an exact error formular for bivariate Thiele-type vector valued rational interpolants is obtained.

Keywords maltivariate, vector valued dates, rational interpolants, error formula.