第17卷第4期 数学研究与评论 Vol. 17 No. 4
1997年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1997

Stancu-Kantorovic 算子的迭代在L 空间的逼近*

薛 银 川
(宁夏大学数学系, 银川750021)

摘 要 本文给出 Stancu-Kantorovic 算子的迭代在L 空间的逼近阶的估计.

关键词 Stancu-Kantorovic 算子, 迭代, 逼近
分类号 AMS(1991) 41A35/CCL O174.41

设$f(x)\in C[0,1]$, D. D. Stancu 在[1]中构造并研究了如下算子

$$S_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n}\omega_{n,k}(x)f\left(\frac{k}{n}\right), \tag{1}$$

其中

$$\omega_{n,k}(x)=C_n^k\frac{x(x+\alpha)\cdots(x+(k-1)\alpha)(1-x)(1-x+\alpha)\cdots(1-x+(n-k-1)\alpha)}{(1+\alpha)(1+2\alpha)\cdots(1+(n-1)\alpha)},$$

$\alpha\geq 0$是只与n 有关的参数

$\alpha=0$时, $S_n(f;x)$就是著名的Bernstein 多项式$B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right)$.

对$f(x)\in L[0,1]$, 令$F(x)=\int f(t)dt$, 定义

$$C_n(f;x)=\frac{d}{dx}S_{n+1}\left(\int f(t)dt;x\right). \tag{2}$$

称$C_n(f;x)$为Stancu-Kantorovic 算子. $\alpha=0$时, $C_n(f;x)$就是著名的Kantorovic 多项式

$$P_n(f;x)=(n+1)\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}f(t)dt. \tag{3}$$

记$C_n^{(1)}(f;x)=C_n(f;x)$, $C_n^{(k+1)}(f;x)=C_n(C_n^{(k)}(f))$, $k=1,2,\cdots$, 称$C_n^{(k)}(f;x)$为$C_n(f;x)$的迭代, 本文讨论$C_n^{(k)}(f;x)$在$L[0,1]$中的逼近, 给出如下

定理 设$f(x)\in L[0,1]$, $0\leq\alpha=\alpha(n)\to 0\,(n\to\infty)$, 则对任何自然数$k$, 有

$$\|C_n^{(k)}(f;x)-f(x)\|_1=O\left(\omega\left(f;\sqrt{\frac{(1+\alpha)^k(n+1)^k-n^k}{(1+\alpha)^k(n+1)^k}}\right)_L\right).$$

推论 设$f(x)\in L[0,1]$, $0\leq\alpha=\alpha(n)\to 0\,(n\to\infty)$, 则对任何自然数$k$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\|C_n^{(k)}(f;x)-f(x)\|_1=0.$$

定理的证明需要下列引理

* 1994年6月6日收到 1997年5月12日收到修改稿

引理1[2]　对任何自然数 k, $C_n^{(k)}(f;x)$ 为线性正算子.

引理2[2]　设 $f(x)\in L[0,1]$, k 为自然数, 则

$$C_n^{(k)}(f;x)=\frac{d}{dx}S_{n+1}^{(k)}\left(\int f(t)\,dt;x\right),$$

这里 $S_n^{(k)}(f;x)$ 是 $S_n(f;x)$ 的迭代

引理3　对任何自然数 k, 有

$$\|C_n^{(k)}(f;x)\|_1\leq\|f\|_1.$$

证明　由引理1及 $S_n^{(k)}(f;0)=f(0)$, $S_n^{(k)}(f;1)=f(1)$ 立得.

引理4[2]　对算子 $S_n^{(k)}(f;x)$ 有

$$S_n^{(k)}(t^2;x)=\frac{1}{(1+\alpha)^k}[x(x+\alpha)+a_n^{(k)}x(1-x)]+\left(1-\frac{1}{(1+\alpha)^{k-1}}\right)x,$$

这里 $a_n^{(k)}=1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^k$.

引理5　记 $\beta_{n,k}=\max\limits_{0\leq x\leq1}S_{n+1}^{(k)}(|t-x|;x)$, 则

$$\beta_{n,k}\leq\sqrt{\frac{(1+\alpha)^k(n+1)^k-n^k}{(1+\alpha)^k(n+1)^k}}.$$

证明　由引理4及线性正算子的 Буняковский 不等式证得.

引理6[3]　设 B_n 是 $C[a,b]\Rightarrow P_n$ 的一列线性算子, (P_n 是次数不超过 n 的代数多项式全体), 满足 $B_n(1;x)=1$, $B_n(t;x)=x$ 以及对 $g(x)\in C[a,b]$, 有

$$B_n(g(t);a)=g(a),\quad B_n(g(t);b)=g(b).$$

设

$$A_n(f(t);x)=\frac{d}{dx}B_{n+1}\left(\int f(t)\,dt;x\right)$$

及 $A_n(f;x)$ 是线性正算子, 且满足

$$\|A_n(f)\|_1\leq M\|f\|_1,\quad\forall f(x)\in L[a,b],\ n=1,2,\cdots.$$

设 $\lambda_n>0$, $\lambda_n\to0\ (n\to\infty)$, 则

$$\|A_n(f)-f\|_1=O(\omega(f;\lambda_n)_L),\quad\forall f(x)\in L[a,b]$$

成立的充分必要条件是

$$\operatorname*{Vrai\,sup}_{a\leq x\leq b}B_{n+1}(|t-x|;x)=O(\lambda_n).$$

令 $\lambda_n=\sqrt{\frac{(1+\alpha)^k(n+1)^k-n^k}{(1+\alpha)^k(n+1)^k}}$, 由于 $0\leq\alpha=\alpha(n)\to0\ (n\to\infty)$ 知 $\lambda_n\to0\ (n\to\infty)$, 由引理1至引理5知算子 $C_n^{(k)}(f;x)$ 满足引理6的条件, 从而定理的结论成立

附注　$\alpha=0$ 时, 由定理可得关于 $P_n^{(k)}(f;x)$ 的如下估计

$$\|P_n^{(k)}(f;x)-f(x)\|_1=O\left(\omega\left(f;\sqrt{\frac{(n+1)^k-n^k}{(n+1)^k}}\right)_L\right),$$

$k=1$ 时, 这便是熟知的关于 Kantorovic 算子的结果

参 考 文 献

[1] D. D. Stancu, *Approximation of functions by a new class of leanear polynomial operators*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl, 13(1968), 1173-1194.

[2] Xue Yinchuan, *On the approximation by the iterates of Stancu operators and its modified operators*, Chinese Quarterly Journal of Mathematics, 11: 1(1996), 18-25.

[3] **曹家鼎, 论非周期函数在 L^p 空间中用奇异积分逼近, 数学学报**, 24: 1(1981), 9-25.

L-Approximation by the Iterates of Stancu-Kantorovic Operators

Xue Yinchuan

(Dept. of Math., Ningxia University, Yinchuan 750021)

Abstract

In this papaer the direct theory of approximation by the iterates of Stancu-Kantorovic operators in $L[0, 1]$ is discussed and the estimate of the degree of the approximation is obtained.

Keywords Stancu-Kantorovic operators, iterate, approximation.