正线性方程组正解的判别*

王殿选　　禹海兰　　　　高益明
(东北电力学院基础部, 吉林132012)　(东北师范大学数学系, 长春130024)

摘　要　本文给出了正线性方程组正解的概念, 给出了正线性方程组正解的若干判别方法

关键词　正线性方程组, 正解, 不可约矩阵
分类号　AMS(1991) 15A24/CCL O151.1

1　引　言

研究问题及实际问题中, 常遇到 n 个未知数 n 个方程的正线性方程组, 虽然可用克莱姆法则求解, 但判别该正线性方程组存在正解更有实际意义. 文[1]中给出了一个判别定理, 本文对文[1]的定理进行了推广, 得出若干正线性方程组正解的判别定理.

2　主要结果

定义1　非齐次线性方程组 $Ax=b, A=(a_{ij})_{n\times n}, a_{ij}\geq 0, i,j=1,2,\cdots,n$. 且 $a_{ii}>0, i=1,2,\cdots,n$. $b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm T}>0$, 则称此方程组为正线性方程组. 若其解 $x^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)^{\mathrm T}>0$, 则 x^* 称为正解.

定理1　设 $A=(I+B)D$, 其中 I 为单位阵, $D=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$, 谱半径 $\rho(B)<1$, 则正线性方程组 $Ax=b$ 存在正解的充要条件是

$$\prod_{k=1}^{\infty}(I+B^{2^k})(I-B)b>0.$$

证明　由 $\rho(B)<1$ 知 $(I+B)^{-1}$ 与 $(I-B)^{-1}$ 存在, 因 $A=(I+B)D$, 所以 $A^{-1}=D^{-1}(I+B)^{-1}$, 由于

$$(I-B^2)^{-1}=(I+B)^{-1}(I-B)^{-1},\ (I-B^4)^{-1}=(I-B^2)^{-1}(I+B^2)^{-1},$$

所以

$$A^{-1}=D^{-1}(I-B^2)^{-1}(I-B)=D^{-1}(I-B^4)^{-1}(I+B^2)(I-B).$$

依次类推得

$$A^{-1}=D^{-1}\prod_{k=1}^{\infty}(I+B^{2^k})(I-B),$$

* 1994年9月10日收到. 1997年4月19日收到修改稿

则有

$$x = A^{-1}B = D^{-1}\prod_{k=1}^{\infty}(I + B^{2^k})(I - B)b.$$

由于对角阵D^{-1}的对角线元素均大于零, 所以$x > 0$的充要条件是

$$\prod_{k=1}^{\infty}(I + B^{2^k})(I - B)b > 0.$$

推论1 若存在正整数n, 使得

$$\prod_{k=1}^{n}(I + B^{2^k})(I - B)b > 0, \tag{1}$$

则正线性方程组$Ax = b$存在正解.

证明 因$B^{2^k} \geq 0$, 所以$I + B^{2^k} \geq 0$, 且$I + B^{2^k}$的对角线元素均大于零, 由于D^{-1}也是对角线元素严格大于零的非负矩阵, 所以$D^{-1}\prod_{k=n+1}^{\infty}(I + B^{2^k})$的主对角线元素均严格大于零, 且为非负矩阵. 因为

$$\begin{aligned} x &= D^{-1}\prod_{k=1}^{\infty}(I + B^{2^k})(I - B)b \\ &= [D^{-1}\prod_{k=n+1}^{\infty}(I + B^{2^k})][\prod_{k=1}^{n}(I + B^{2^k})(I - B)b], \end{aligned}$$

由(1)式知

$$\prod_{k=1}^{n}(I + B^{2^k})(I - B)b > 0,$$

所以$x > 0$.

推论2 若对任意k, B^{2^k}为不可约矩阵, $(I - B)b$为非零非负向量, 则正线性方程组$Ax = b$存在正解.

证明 首先定义向量列$x_0 = (I - B)b$, $x_1 = (I + B^2)x_0, \cdots, x_k = (I + B^{2^k})x_{k-1}$ $(k = 1, 2, \cdots)$. 由于$x_k = x_{k-1} + B^{2^k}x_{k-1}$, 且$x_0$为非零非负向量, B^{2^k}为不可约矩阵, 知x_k的零分量个数不会比x_{k-1}多.

事实上, 设x_k和x_{k-1}的零分量个数相同, 则存在正交阵P使

$$Px_k = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Px_{k-1} = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix},$$

其中$\alpha, \beta > 0$.

则由

$$Px_k = Px_{k-1} + PB^{2^k}P^{\mathrm{T}}Px_{k-1} = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix},$$

推得$B_{21}\beta = 0$, $\beta > 0$, 得$B_{21} = 0$, 这与B^{2^k}为不可约阵矛盾, 于是得x_k的零分量个数比x_{k-1}的少. 因为x_0是非零非负, 至多有$n - 1$个零分量, 故当$m \geq n - 1$时, 有

$$x_m = \prod_{k=1}^{m}(I + B^{2^k})(I - B)b > 0.$$

为了简单起见, 设$(I - B)b = c$, $B^2 = (\widetilde{b_{ij}})$, $B^2c = d = (d_1, \cdots, d_n)^{\mathrm{T}}$, $t = \min_i d_i$, $T =$

$\max_i d_i, r = \min_i \sum_{j=1}^{n} \widetilde{b}_{ij}, R = \max_i \sum_{j=1}^{n} \widetilde{b}_{ij}, e = (1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$. 于是得下面定理

定理2 设 $t > 0, R < 1$, 则有

(1) 若 $c + \frac{t}{1-r} e > 0$时, 正线性方程组$Ax = b$存在正解;

(2) 若 $c + \frac{T}{1-R} e > 0$时不成立时, 正线性方程组$Ax = b$不存在正解.

证明 由$X = D^{-1}(I - B^2)^{-1}(I - B)b$得

$$DX = (I - B^2)^{-1} c = (I + \sum_{k=1}^{\infty} B^{2k}) c = c + \sum_{k=0}^{\infty} B^{2k} d = c + (I - B^2)^{-1} d.$$

若设$(I - B^2) y = d$, 即

$$(I - B^2) y = d, \tag{2}$$

$$y = (y_1, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}, y_p = \max_i y_i, y_q = \min_i y_i.$$

则由(2)中第p个方程得

$$d_p = (1 - \widetilde{b}_{pp}) y_p - \sum_{j \neq p} \widetilde{b}_{pj} y_j \geq (1 - \sum_{j=1}^{n} \widetilde{b}_{pj}) y_p \geq (1 - k) y_p$$

$$y_i \leq y_p \leq \frac{d_p}{1-R} \leq \frac{T}{1-R},$$

故有

$$y = (I - B^2)^{-1} d \leq \frac{T}{1-R} e,$$

所以当 $c + \frac{T}{1-R} e > 0$不成立时, 正线性方程组$Ax = b$不存在正解.

再由(2)中第q个方程得

$$d_q = (1 - \widetilde{b}_{qq}) y_q - \sum_{j \neq q} \widetilde{b}_{qj} y_j \leq (1 - \sum_{j=1}^{n} \widetilde{b}_{qj}) y_q \geq (1 - r) y_q,$$

$$y_i \geq y_q \geq \frac{d_q}{1-r} \geq \frac{t}{1-r},$$

故有

$$y = (I - B^2)^{-1} d \geq \frac{t}{1-r} e,$$

所以当 $c + \frac{t}{1-r} e > 0$时, 则有

$$DX = c + (I - B^2)^{-1} d \geq c + \frac{t}{1-r} e > 0,$$

正线性方程组$Ax = b$存在正解.

定理3 若存在 $a > 0, k \in \{1, \cdots, n\}$, 使得

(1) 对任意 $i, j\ (i \neq k)$有 $a_{ij} \geq a a_{kj}, b_i > a b_k$;

(2) $b_k > \sum_{j \neq k} \frac{a_{kj}}{a_{jj} - a a_{kj}} (b_j - a b_k), b_i$

$$> \sum_{j \neq i} \frac{a_{ij}}{a_{jj}} b_j - \frac{a}{a_{jj}} \sum_{j \neq i, k} [a_{ij} b_k + \frac{a_{kj}(a_{jj} - a_{ij})}{a_{jj} - a a_{kj}} (b_j - a b_k)],$$

则正线性方程组$Ax=b$存在正解.

证明　对$Ax=b$用$(-a)$乘以第k个方程加到第i个$(i\neq k)$方程上去,则得同解方程组.由条件(1)知这个同解方程组仍为正线性方程组.则由文[1]定理得:若有

$$b_k>\sum_{j\neq k}\frac{a_{kj}}{a_{jj}-aa_{kj}}(b_j-ab_k),$$

对任$i\neq k$有

$$b_i-ab_k>\frac{a_{ik}-aa_{kk}}{a_{kk}}b_k+\sum_{j\neq i,k}\frac{a_{ij}-aa_{kj}}{a_{jj}-aa_{kj}}(b_j-ab_k),$$

即

$$b_i>\sum_{j\neq i}\frac{a_{ij}}{a_{jj}}b_j-\frac{a}{a_{jj}}\sum_{j\neq i,k}\left[a_{ij}b_k+\frac{a_{kj}(a_{jj}-a_{ij})}{a_{jj}-aa_{kj}}(b_j-ab_k)\right],$$

同解方程组存在正解.故原方程组存在正解.

参　考　文　献

[1] M. Kaykobad, *Positive solution of positive linear systems*, Linear Algebra Appl., 64(1985), 133-140.

[2] M. Kaykobad, *Positive solutions of a class of linear systems*, Linear Algebra Appl., 72(1985), 97-105.

Discrimination of a Positive Solution of Positive Linear Systems

Wang Dianxuan　　Yu Hailan

(Dept. of Basi Sci Course, Northeast China Institute of Electric Power, Jilin 132012)

Gao Yiming

(Math Dept. of Northeast Normal University, Changchun 130024)

Abstract

In this paper, the concept of positive solution of positive linear systems is given. Some new are given conditions for the existence of a positive solution of positive linear system, the result of [1] is generlized.

Keywords　positive linear system, positive solution, irreducible matrix.