第17卷第4期 数学研究与评论 Vol. 17 No. 4
1997年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1997

利用矩阵方程研究两类线性方程反问题*

张宝善 蒋永泉
(上海大学应用数学和力学研究所, 200072) (徐州师范大学数学系, 221009)

摘　要　将线性代数方程组反问题转化为解列满秩的矩阵方程 $YB = C$, 利用矩阵方程解的结构简化反问题Ⅱ[6]的初等变换法, 给出反问题Ⅲ[6]一个猜测的简单证明

关键词　反问题Ⅱ, Ⅱ矩阵方程, 初等变换法
分类号　AMS(1991) 15A24/CCL O151.21

1　引　言

自从李森林先生首次提出一类线性代数方程组反问题[1]以来, 文[2-5]研究了各种类型的反问题 纵观这些反问题, 不难发现它们都可以归结为以 X 为未知矩阵的矩阵方程

$$AX = C. \tag{1.1}$$

反问题:"对给定满足一定条件的矩阵 X, C 确定的矩阵 A, 使得它满足(1.1)", 其中 $A \in M_{s\times r}(F)$, $X \in M_{n\times m}(F)$, $C \in M_{s\times m}(F)$. 这里的 $M_{k\times l}(F)$ 表示数域 F 上 $k\times l$ 矩阵的全体 这实际上为新的一类以 Y 为未知矩阵的矩阵方程

$$YB = C \quad (B = X) \tag{1.2}$$

满足一定条件的解的存在性问题 例如, 文献[6]研究的两类反问题(以下简称为反问题Ⅱ, 反问题Ⅲ)就可以视为矩阵方程(1.2)中

$$B = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)_{n\times m},\ C = (b, b, \cdots, b)_{s\times m} \tag{1.3}$$

情形, 这里的 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 为 n 个分量的线性无关列向量组, b 为 s 个分量的列向量且 $s = n - m + 1$. 本文利用矩阵方程(1.2)解的结构简化反问题Ⅱ的初等变换法, 给出反问题Ⅲ中一个重要猜测的简单证明

2　反问题Ⅱ简化的初等变换法

首先研究矩阵方程(1.2)中矩阵 B 列满秩时的解的表示 设矩阵方程(1.2)中 B, C 为

$$B = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)_{n\times m},\ C = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)_{s\times m}, \tag{2.1}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 为给定的 n 个分量的线性无关列向量组, $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 为 s 个分量的列向量组 如果由(2.1)决定的(1.2)中矩阵 B 列满秩, 那么利用熟知的线性代数知识知, 矩阵 B 可经一系

* 1994年9月10日收到 1997年4月19日收到修改稿

列初等行变换化为分块阵$\begin{pmatrix} I_m \\ O_{(n-m)\times m} \end{pmatrix}_{n\times m}$，即存在 n 阶可逆阵 $p=\begin{pmatrix} M_{m\times n} \\ N_{(n-m)\times n} \end{pmatrix}$ 使得 $PB=\begin{pmatrix} I_m \\ O_{(n-m)\times m} \end{pmatrix}_{n\times m}$ 亦即

$$M_{m\times n}B = I_m,\ N_{(n-m)\times n}B = O_{(n-m)\times m}, \tag{2.2}$$

于是有

定理1 由(2.1)决定的矩阵方程(1.2)的一般解为

$$A_{s\times n} = CM_{m\times n} + D_{s\times(n-m)}N_{(n-m)\times n}, \tag{2.3}$$

其中$M_{m\times n}, N_{(n-m)\times n}$满足(2.2)，$D_{s\times(n-m)}$为任意 $s\times(n-m)$ 矩阵

推论2 反问题Ⅱ的一般解为

$$A_{s\times n} = (b, b, \cdots, b)_{s\times m}M_{m\times n} + D_{s\times(n-m)}N_{(n-m)\times n}, \tag{2.4}$$

定理1(略)可以用通常初等变换法得到证明，推论2是定理1的直接结果 可以取文[6]中例子为例说明如下

例[6] 对 $\alpha_1=(1,0,0,0,-1)^T, \alpha_2=(0,-1,0,1,0)^T, \alpha_3=(0,0,1,-1,0)^T, b=(1,1,1)^T$，可以按初等变换法求得所有3×5矩阵$A$ 使得$Ax=b$ 以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$为解向量为

$$A_{3\times 5} = \begin{pmatrix} 1+b_1 & -1+\alpha_1 & -1+\alpha_1 & \alpha_1 & b_1 \\ 1+b_2 & -1+\alpha_2 & -1+\alpha_2 & \alpha_2 & b_2 \\ 1+b_3 & -1+\alpha_3 & -1+\alpha_3 & \alpha_3 & b_3 \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

其中诸 $\alpha_i, b_i\ (i=1,2,3)$ 为任意常数，这个结果与文[6]完全一致

3 反问题Ⅲ中一个重要猜测的简单证明

关于反问题Ⅲ中重要猜测[6]"秩$A_{s\times n}=s \Leftrightarrow \det(D_{s\times(n-m)}, b)\neq 0$"，可以给出肯定的回答 事实上，有下面简单证明

猜测的简单证明 将反问题Ⅱ的一般解(2.4)利用分块技巧变为

$$A_{s\times n} = (b, b, \cdots, b, D_{s\times(n-m)})_{s\times n}\begin{pmatrix} M_{m\times n} \\ N_{(n-m)\times n} \end{pmatrix},\ p=\begin{pmatrix} M_{m\times n} \\ N_{(n-m)\times n} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

注意到 P 为 n 阶可逆矩阵以及 $s=n-m+1$可以知道

$$\text{秩}A_{s\times n} = \text{秩}(b, b, \cdots, b, D_{s\times(n-m)})_{s\times n} = \text{秩}(D_{s\times(n-m)}, b)_{s\times s} \tag{3.2}$$

$$\text{秩}(D_{s\times(n-m)}, b)_{s\times s} = s \Leftrightarrow \det(D_{s\times(n-m)}, b) \neq 0 \tag{3.3}$$

于是由(3.2)，(3.3)立刻得到秩$A_{s\times n}=s \Leftrightarrow \det(D_{s\times(n-m)}, b)\neq 0$，重要猜测得到证明

进一步地，利用(3.2)还可以证明如下两个定理

定理3 反问题Ⅱ的一般解(2.4)中秩$A_{s\times n}=r\ (1\leq r\leq s)$的解总是存在的，并且总有秩$A_{s\times n}=r \Leftrightarrow$秩$(D_{s\times(n-m)}, b)=r$ 成立

定理4 由(2.1)式决定的矩阵方程(1.2)一般解中总有秩$A_{s\times n}=$秩$((C, D_{s\times(n-m)})$以及不等式秩$C\leq$秩$A_{s\times n}\leq s$ 成立

参 考 文 献

[1] 李森林，几类直接控制系统绝对稳定的充分及必要条件，科学通报，27(1982)，581-582.

[2] 张 磊，一类对称非负定矩阵反问题解存在的条件，计算数学，4(1989)，337-343.

[3] 郭 忠，矩阵正定性的判定及线性方程组 $Ax=b$ 反问题的求解，科学通报，32(1987)，95-98.

[4] 张宝善，齐线性方程组 $Ax=0$ 的反问题研究，徐州师范学院学报，3(1992)，7-10.

[5] 张磊、唐隆基，关于线性方程组 $Ax=b$ 的一类反问题，数学的实践与认识，1(1984)，21-26.

[6] 王卿文，关于非齐次线性方程组的又一类反问题，数学通报，3(1994)，35-37.

On Two Kinds of Inverse Problems of Linear Equations

Zhang Baoshan

(Inst. of Appl. Math. &Mech., Shanghai Univ., 200072)

Jiang Yongquan

(Xuzhou Normal University, Xuzhou 221009)

Abstract

The inverse problems of linear equations is reduced to matrix equation $YB=C$, where β is a matrix of column full rank. By an elementary operation in inverse problem Ⅱ with the structure of solution of the matrix equation we give a simple proof for a conjecture of inverse problem Ⅲ in [6].

Keywords inverse problem Ⅱ, Ⅲ, matrix equation, elementary operation.