第17卷第4期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.17 No.4
1997年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1997

凸函数的双参数平均不等式*

孙 明 保
(岳阳大学基础课部, 湖南414000)

关键词 双参数平均, 不等式
分类号 AMS(1991) 26D/CCL O174.13

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且下界为正, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的双参数平均定义为

$$M_{p,q}(f)=\begin{cases}\left[\dfrac{\int f^p(x)dx}{\int f^q(x)dx}\right]^{\frac{1}{p-q}}, & p\neq q,\\ \exp\dfrac{\int f^q(x)\ln f(x)dx}{\int f^q(x)dx}, & p=q.\end{cases}$$

显见, $M_{p,0}(f)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 p 次幂平均 $M_p(f)$.

正数 x,y 的双参数平均[1,2] 定义为

$$E_{p,q}(x,y)=\begin{cases}\left[\dfrac{q(x^p-y^p)}{p(x^q-y^q)}\right]^{\frac{1}{p-q}}, & x\neq y, \quad pq(p-q)\neq 0,\\ y, & x=y,\end{cases}$$

这时

$$E_{p,p}(x,y)=\begin{cases}\left[\dfrac{x^{x^q}}{y^{y^q}}\right]^{\frac{1}{x^q-y^q}}\cdot e^{-\frac{1}{q}}, & x\neq y, \quad p=q\neq 0;\\ y, & x=y,\end{cases}$$

$$E_{0,0}(x,y)=\sqrt{xy};$$

$$E_{p,0}(x,y)=\begin{cases}\left[\dfrac{x^p-y^p}{p(\ln x-\ln y)}\right]^{\frac{1}{p}}, & x\neq y, \quad p\neq 0;\\ y, & x=y,\end{cases}$$

$$E_{0,q}(x,y)=E_{q,0}(x,y), \quad q\neq 0.$$

易知, $E_{2p,p}(x,y)$, $E_{p,1}(x,y)$, $E_{p+1,p}(x,y)$ 依次是文[1]中的幂平均 $M_p(x,y)$, Stolarsky 平均 $S_p(x,y)$, 单参数平均 $J_p(x,y)$.

著名的 Hadamard 不等式[3] 给出了连续的凸函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的算术平均与区

* 1994年10月20日收到. 1997年4月10日收到修改稿

间端点处函数值 $f(a), f(b)$ 的算术平均间的大小关系:

$$\frac{1}{b-a}\int f(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{1}$$

本文则在 $f(x)$ 的下界为正且导数 $f'(x)$ 连续递增(或递减)的条件下用微积分将(1)推广为下述凸函数的双参数平均不等式.

定理 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上正的连续函数,且在 (a, b) 内导数 $f'(x)$ 连续递增(下凸),则对任意 p, q,有

$$M_{p,q}(f) \le E_{p+1,q+1}(f(a), f(b)), \tag{2}$$

仅当 $f(x)$ 为正的线性函数时等号成立

若在 (a, b) 内导数 $f'(x)$ 连续递减(上凸),则(2)的不等号反向

由定理易得

推论 在本文定理的条件下,对任意 p,有

$$M_{2p-1,p-1}(f) \le M_p(f(a), f(b)), \tag{3}$$

$$M_p(f) \le S_{p+1}(f(a), f(b)), \tag{4}$$

$$M_{p,p-1}(f) \le J_p(f(a), f(b)). \tag{5}$$

若在 (a, b) 内导数 $f'(x)$ 连续递减(上凸),则(3),(4),(5)的不等号反向;(3),(4),(5)中等号仅当 $f(x)$ 为正的线性函数时成立

定理的证明用到下列引理

引理1 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上正的连续函数,且在 (a, b) 内导数 $f'(x)$ 连续递增,记

$$G(x) = f^{q+1}(x) - f^{q+1}(a) - (q+1)f'(x)\int f^q(t)dt,$$

则

1) 当 $q > -1$ 时,$G(x) \le 0$;

2) 当 $q < -1$ 时,$G(x) \ge 0$.

若在 (a, b) 内导数 $f'(x)$ 连续递减,则1),2)的不等号反向

引理2 设 $H(x) = (p-q)x^{p+1} - (p+1)x^{p-q} + (q+1)$, $x > 0$,则

1) 当 $p > q > -1$ 或 $q < p < -1$ 或 $p < -1$ 而 $q > -1$ 时,对于 $x \ne 1$ 有 $H(x) > 0$;

2) 当 $p < q < -1$ 或 $-1 < p < q$ 或 $p > -1$ 而 $q < -1$ 时,对于 $x \ne 1$ 有 $H(x) < 0$.

作者衷心感谢周持中教授的指导.

参 考 文 献

[1] 匡继昌, 常用不等式(第2版), 湖南教育出版社, 1993, 40-42.

[2] 杨任尔、曹冬极, 对数平均的推广, 宁波大学学报, 2: 2(1989), 105-108.

[3] J. J. Hadamard, Math. Pures Appl., 58(1893), 171.

[4] D. S. Mitrinovic, J. E. Pecaric, A. M. Fink, *Classical and New Inequality in Analysis*, Kluwer Acud. Publ., 1993.