

左 Clifford 拟正则半群的半直积及结构*

张 玉 芬

(山东师范大学数学系, 济南250014)

摘 要 本文给出了左 Clifford 拟正则半群的半直积和圈积仍为左 Clifford 拟正则半群的充分必要条件及半直积的结构

关键词 左 Clifford 拟正则半群, 左群的 nil-扩张的半格, 半直积和圈积

分类号 AM S(1991) 20M /CCL O 152.7

文中用 $E(S)$ 和 $\text{Reg}S$ 分别表示半群 S 的幂等元集和正则元集, 其它未说明的术语和概念见[1], [2]

设 S, T 是么半群, $\text{End}(T)$ 是 T 的自同态么半群, 令 $\alpha: S \rightarrow \text{End}(T), s \mapsto \alpha(s)$ 是给定的半群同态映射($\alpha(1)$ 是 T 的恒等映射), 对 $\forall s \in S$ 和 $\forall t \in T$, 用 t^s 表示 t 在 $\alpha(s)$ 下的象 $t^{\alpha(s)}$, 显然 $(t_1 t_2)^s = t_1^s t_2^s, t_1, t_2 \in T, s \in S$, 且 $t^{(s_1 s_2)} = (t^{s_1})^{s_2}, t \in T, s_1, s_2 \in S$.

半直积 $S \times_{\alpha} T$ 是关于乘法 $(s_1, t_1)(s_2, t_2) = (s_1 s_2, t_1^{s_2} t_2)$ 的半群, 其中 $s_1, s_2 \in S, t_1, t_2 \in T$, 且 $(s_1, t_1) = (s_2, t_2) \Leftrightarrow s_1 = s_2, t_1 = t_2$

引理 1 设 S, T 为么半群, $\alpha: S \rightarrow \text{End}(T), s \mapsto \alpha(s)$ 是给定的半群同态映射, 且半直积 $S \times_{\alpha} T$ 是左 C 拟正则么半群, 则有

- (1) $(1, 1)$ 是 $S \times_{\alpha} T$ 的么元, 且 $1^s = 1, \forall s \in S$.
- (2) S 和 T 均为左 C 拟正则么半群
- (3) 对 $\forall e \in E(S)$ 和 $\forall t \in \text{Reg}T$, 有 $t^e = t$
- (4) 对 $\forall s \in S$ 和 $\forall u \in E(T)$, 有 $uu^s = u$
- (5) 对 $\forall s \in \text{Reg}S$ 和 $\forall u \in E(T)$, 有 $u^s u = u^s$.
- (6) 对 $\forall e \in E(S)$ 和 $\forall t \in T$, 由 $t^e t = t$ 可推出 $t^e = t$
- (7) 对 $\forall s \in S$ 和 $\forall t \in T, \exists m \in \mathbb{N}$, 使得 $s^m \in \text{Reg}S, t^{s^{m-1}} \cdots t^s t \in \text{Reg}T$.

定理 1 设 S, T 均为么半群, $\alpha: S \rightarrow \text{End}(T), s \mapsto \alpha(s)$ 是给定的半群同态映射, 则半直积 $S \times_{\alpha} T$ 是左 C 拟正则么半群当且仅当下列诸条件同时成立:

- (1) S 和 T 均为左 C 拟正则么半群,
- (2) 对 $\forall s \in S$ 和 $\forall t \in T, \exists m \in \mathbb{N}$, 使得 $s^m \in \text{Reg}S, t^{s^{m-1}} \cdots t^s t \in \text{Reg}T$;
- (3) 对 $\forall e \in E(S)$ 和 $\forall t \in \text{Reg}T$, 有 $t^e = t$;
- (4) 对 $\forall s \in \text{Reg}S$ 和 $\forall u \in E(T)$, 有 $u^s u = u^s$;

* 1994年11月7日收到 1997年4月1日收到修改稿

(5) 对 $\forall e \in E(S)$ 和 $\forall t \in T$, 由 $t^e t = t$ 可推出 $t^e = t$

令 S 是拟正则半群, $\mathbf{L}^*, R^*, J^*$ 表示 S 的广义 Green 关系^[2].

引理 2 设 S, T 均为么半群, $\alpha: S \rightarrow \text{End}(T), s \mapsto \alpha(s)$ 是给定的半群同态映射, 半直积 $S \times_{\alpha} T$ 是左 C 拟正则么半群

(1) 对 $\forall (a, b) \in S \times_{\alpha} T$, 则有

1.° $(a, b) \in E(S \times_{\alpha} T) \Leftrightarrow a \in E(S), b \in E(T)$.

2.° $(a, b) \in \text{Reg}(S \times_{\alpha} T) \Leftrightarrow a \in \text{Reg}(S), b \in \text{Reg}(T)$.

(2) 对 $\forall s \in S$ 和 $\forall t \in T$, 则有 $t \mathbf{L}^* t^s$.

引理 3 设 $S, T, \alpha: S \times_{\alpha} T$ 均同引理 2, 且 $S = \bigcup_{x \in X} S_x, T = \bigcup_{y \in Y} T_y$, 其中 S_x 为左群 $\text{Reg} S_x$ 的 nil-扩张, T_y 为左群 $\text{Reg} T_y$ 的 nil-扩张, X, Y 为格, 取定 $y \in Y$, 对 $\forall x \in X$, 则有

(1) 令 $\alpha_{(x,y)}$ 是 α 在 S_x 上的限制, 则 $\alpha_{(x,y)}$ 是 S_x 到 $\text{End}(T_y)$ 的半群同态映射

(2) 令 $\alpha_{(x,y)}^*$ 是 $\alpha_{(x,y)}$ 在 $\text{Reg} S_x$ 上的限制, 则 $\alpha_{(x,y)}^*$ 是 $\text{Reg} S_x$ 到 $\text{End}(\text{Reg} T_y)$ 的半群同态映射

定理 2 设 $S, T, \alpha: S \times_{\alpha} T, \alpha_{(x,y)}, \alpha_{(x,y)}^*$ 均同引理 3, 令 $S = \bigcup_{x \in X} S_x, T = \bigcup_{y \in Y} T_y, X, Y$ 为半格, S_x 和 T_y 分别为左群 $\text{Reg} S_x$ 和 $\text{Reg} T_y$ 的 nil-扩张 对 $\forall x \in X, \forall y \in Y$, 则有 $S \times_{\alpha} T = \bigcup_{(x,y) \in X \times Y} (S_x \times_{\alpha_{(x,y)}} T_y)$, 其中 $S_x \times_{\alpha_{(x,y)}} T_y$ 是左群 $\text{Reg} S_x \times_{\alpha_{(x,y)}^*} \text{Reg} T_y$ 的 nil-扩张, 半格 $X \times Y$ 是 X 和 Y 的直积

设 X 为左 S -系, $T^X = \{f \mid f \text{ 是 } X \text{ 到 } T \text{ 的映射}\}$, 对 $\forall f, g \in T^X, \forall x \in X, (fg)_x = f(x)g(x)$, 易知 T^X 为么半群 令 $\alpha: S \rightarrow \text{End}(T^X)$ 是给定的半群同态映射, 对 $\forall s \in S, \forall g \in T^X$ 和 $\forall x \in X$, 有 $f^s(x) = f(sx)$, 称半直积 $S \times_{\alpha} T^X$ 为 S 和 T 的圈和, 记为 $SW_X T$. 当 $x = s$, 则 $SW_s T$ 为 S 和 T 的标准圈积, 记为 $SW T$.

定理 3 设 S, T 均为么半群, X 为左 S -系, 则 $SW_X T$ 是左 C 拟正则么半群当且仅当下列诸条件同时成立

(1) S, T 均为左 C 拟正则么半群;

(2) 对 $\forall T' \in M, \exists m \in N$, 对所有 $t \in T'$, 均有 $t^m \in \text{Reg} T$;

(3) 对 $\forall e \in E(S), \forall x \in X$, 有 $ex = x$ 或 $|T| = 1$;

(4) 对 $\forall s \in S, \forall x \in X$, 有 $sx = x$ 或 T 是群

定理 4 标准圈积 $SW T$ 是左 C 拟正则么半群当且仅当下列诸条件同时成立,

(1) S, T 均为左 C 拟正则么半群;

(2) 对 $\forall T' \in M, \exists m \in N$, 对所有 $t \in T'$, 均有 $t^m \in \text{Reg} T$;

(3) S 是群或 $|T| = 1$;

(4) $|S| = 1$ 或 T 是群

参 考 文 献

- [1] 朱聘瑜, 郭聿琦, 岑嘉评, 左 Clifford 半群的特征与结构, 中国科学, A 辑: 6(1991), 582- 590
- [2] S. Bogdanovic, *Semigroups with a system of subsemigroups*, Novi Sad, 1985
- [3] W. R. N ico, *On the regularity of semidirect products*, J. Algebra, Vol 80(1983), 29- 36