第18卷第1期 数学研究与评论 Vol. 18 No. 1
1998年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1998

在 Radon 测度给定下的一类退化椭圆型方程*

甘 筱 青

(南昌大学, 330029)

摘 要 此文研究一类在 Radon 测度给定下二阶退化拟线性椭圆型方程. 通过引入逼近子问题列并求解、先验估计和收敛性研究, 证明了该方程广义解在带权 Sobolev 空间的存在性.

关键词 Radon 测度, 退化椭圆型方程, 广义解, 先验估计, 收敛性

分类号 AMS(1991) 36L65/CCL O175.2

1 提出问题

文[1], [2], [3]对于一类二阶椭圆型方程 $Au=f$, 讨论了当右端非齐次项 $f\in L^1(\Omega)$, 更一般地当 $f\in M(\Omega)$ 时弱解的存在性, 这里 $M(\Omega)=[Cc(\Omega)]'$, 即 $Cc(\Omega)$ 拓扑对偶, 也称为有界的 Radon 测度集, 且 $L^1(\Omega)\subset M(\Omega)$. 最典型的例子是狄拉克函数 $\delta\in M(\Omega)$. 因为 $\forall\varphi\in Cc(\Omega)$, 有 $\langle\delta a,\varphi\rangle=\int_\Omega\delta(x-a)\varphi(x)dx=\varphi(a)$. 设二阶拟线性问题

$$(P_1)\quad\begin{cases}-\operatorname{div}(\hat{a}(u,Du))=\mu, & \text{在 }\Omega\text{ 中}\\ u=0, & \text{在 }\partial\Omega,\end{cases}$$

其中 $\mu\in M(\Omega)$, Ω 为 R^N 中的有界开集, $\hat{a}: R\times R^N\to R^N$ 连续且满足

(H1) $\exists\,\alpha>0$, $\forall(u,\xi)\in R\times R^N$, 使得

$$\hat{a}(u,\xi)\cdot\xi\geq\alpha\cdot|\xi|^p,\quad 2-\frac{1}{N}<p\leq N;$$

(H2) $\forall u\in R$, $\forall\xi_1,\xi_2\in R^N$, $\xi_1\neq\xi_2$, 有

$$[\hat{a}(u,\xi_1)-\hat{a}(u,\xi_2)][\xi_1-\xi_2]>0;$$

(H3) $\exists\,C>0$, $\forall(u,\xi)\in R\times R^N$, 有

$$|\hat{a}(u,\xi)|\leq C[|u|^{p-1}+|\xi|^{p-1}].$$

文[1], [2], [3]证明了存在(P_1)的广义解 $u\in W_0^{1,q}(\Omega)$, 其中 $q\in[1,\frac{N}{N-1}(p-1)]$.

不失一般性, 考虑如下问题

$$(P_2)\quad\begin{cases}-\operatorname{div}(|x|^\nu\hat{a}(u,Du))=\mu, & \text{在 }\Omega\text{ 中}\\ u=0, & \text{在 }\partial\Omega,\end{cases}$$

* 1995年3月6日收到. 1997年9月10日收到修改稿. 江西省自然科学基金资助项目.

其中 $\hat{a}$ 同上, 但在(H1)中 p 的取值改为 $2-\frac{1}{N+\nu}<p\le N$; $|x|^{\nu}$ 作为具散度主部形式的权重, $0\in\Omega$, $\nu\ge 0$. 由此, 有关项不再满足强制性, (P_2) 称为在 Radon 测度给定下的退化拟线性椭圆型方程问题. 将在带权 Sobloev 空间(参见[4], [6])寻求 (P_2) 的广义解.

2　主要定理及其证明

定理2.1　$\forall q\in[1,\frac{N+\nu}{N+\nu-1}(p-1)]$, 问题 (P_2) 至少存在着一个广义解

$$u\in W_0^{1,q}(\Omega,|x|^{\nu}).$$

证明　分成三个步骤来证明这个定理.

(一)　构造 (P_2) 的逼近子问题列并求解

从定理1.1, 存在着 $\mathcal{D}(\Omega)$ 中的序列 $\{\mu_n\}$ 使得 $\mu_n\to\mu$ 在 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 中成立, 且 $\|\mu_n\|_{L^1(\Omega)}\le\|\mu\|_{M(\Omega)}$. 于是构造 (P_2) 的逼近子问题列:

$$(P_{2n})\quad\begin{cases}\mathbf{A}u_n\overset{\triangle}{=}-\operatorname{div}\left(\left(\frac{1}{n}+|x|^2\right)^{\nu/2}\hat{a}(u_n,Du_n)\right)=\mu_n & \text{在 }\Omega\text{ 中},\\ u_n=0, & \text{在 }\partial\Omega\text{ 上},\end{cases}$$

其中 u_n 表示 (P_{2n}) 的解, 这时 $\mu_n\in\mathcal{D}(\Omega)\subset W^{-1,p'}(\Omega)$.

取 $V=W_0^{1,p}(\Omega)$, 利用 $\hat{a}$ 所满足的假定, 不难验证 (P_{2n}) 方程中算子 $\mathbf{A}$ 满足椭圆型方程的一般存在性定理, 因此存在着 (P_{2n}) 的广义解 $u_n\in W_0^{1,p}(\Omega)$. 它满足

$$(\tilde{P}_{2n})\quad\begin{cases}\int_\Omega\left(\frac{1}{n}+|x|^2\right)^{\nu/2}\hat{a}(u_n,Du_n)Dv\,dx=\int_\Omega\mu_n v\,dx, & \forall v\in W_0^{1,p}(\Omega),\\ u_n\in W_0^{1,p}(\Omega).\end{cases}$$

(二)　$\{u_n\}$ 的先验估计和收敛性

由于 $\|\mu_n\|_{L^1(\Omega)}\le C$, 为了使得 $\int_\Omega\mu_n v\,dx$ 关于 n 一致有界, 必须选择适当的测试函数 v_n(作为 u_n 的函数), 使得 $\|v_n\|_{L^\infty(\Omega)}\le C$ 且 $v_n\in W_0^{1,p}(\Omega)$. 以下证明中, 若无特别说明, C 均表示与 n 无关的常数.

引理2.1　设 $\delta>0$, 则存在与 n 无关的常数 C, 使得

$$\int_\Omega\frac{|x|^{\nu}\cdot|Du_n|^p}{(1+|u_n|)^{1+\delta}}dx\le\int_\Omega\frac{\left(\frac{1}{n}+|x|^2\right)^{\nu/2}\cdot|Du_n|^p}{(1+|u_n|)^{1+\delta}}dx\le C.$$

证明　取 $\Psi_\delta(\sigma)=\int\frac{1}{(1+|t|)^{1+\delta}}dt$ $\left(|\Psi_\delta|_{L^\infty}\le\frac{1}{\delta}\right)$, 并且令 $v_n=\Psi_\delta(u_n)$, 那么由[4]中命题IX.5, $v_n\in W_0^{1,p}(\Omega)$, $Dv_n=\frac{Du_n}{(1+|u_n|)^{1+\delta}}$. 把 v_n 作为 $(\tilde{P}_{2n})$ 的测试函数, 并利用 $\hat{a}$ 的性质可得:

$$\alpha\int_\Omega\frac{\left(\frac{1}{n}+|x|^2\right)^{\nu/2}\cdot|Du_n|^p}{(1+|u_n|)^{1+\delta}}dx\le\int_\Omega\mu_n v_n\,dx\le\frac{1}{\delta}\|\mu_n\|_{L^1},$$

从而

$$\int_\Omega \frac{|x|^\nu \cdot |Du_n|^p}{(1+|u_n|)^{1+\delta}}dx \le \int_\Omega \frac{(\frac{1}{n}+|x|^2)^{\nu/2}\cdot |Du_n|^p}{(1+|u_n|)^{1+\delta}}dx \le C(\alpha,\delta) \quad (\forall n\ge 1).$$

引理2.2 如果$2-\frac{1}{N+\nu}<p\le N$，那么$\forall q\in[1,q_c=\frac{N+\nu}{N+\nu-1}(p-1)]$，存在着与$n$无关的常数$C$，使得

$$\int_\Omega |x|^\nu\cdot |Du_n|^q dx \le \int_\Omega (\frac{1}{n}+|x|^2)^{\nu/2}|Du_n|^q dx \le C,$$

即u_n在$W_0^{1,q}(\Omega,|x|^\nu)$中保持一致有界.

证明 第一个不等式显然成立. 现考虑

$$\int_\Omega (\frac{1}{n}+|x|^2)^{\nu/2}\cdot |Du_n|^q dx$$

$$= \int_\Omega \frac{(\frac{1}{n}+|x|^2)^{\nu/2\cdot \frac{q}{p}}\cdot |Du_n|^q}{(1+|u_n|)^{(1+\delta)q/p}}(1+|u_n|)^{(1+\delta)q/p}(\frac{1}{n}+|x|^2)^{\nu/2(1-\frac{q}{p})}dx$$

$$\le \left(\int_\Omega \frac{(\frac{1}{n}+|x|^2)^{\nu/2}\cdot |Du_n|^p}{(1+|u_n|)^{1+\delta}}dx\right)^{q/p}\left[\int_\Omega \left(1+|u_n|\right)^{\frac{(1+\delta)q}{p-q}}(\frac{1}{n}+|x|^2)^{\frac{\nu}{2}}dx\right]^{1-\frac{q}{p}}$$

$$\le C+C\left(\int_\Omega |u_n|^{\frac{(1+\delta)q}{p-q}}(\frac{1}{n}+|x|^2)^{\nu/2}dx\right)^{1-\frac{q}{p}}.$$

可选取$\delta>0$**和**ϵ_0**充分小，满足**$\frac{(1+\delta)q}{p-q}=q^*\triangleq\frac{(q-\epsilon_0)(N+\nu)}{N+\nu-q}$（**从条件**$q\in[1,q_c)$**可得**$\frac{q}{p-q}<q^*$**，因此这样的选择是可以办到的**）. **由于这时**$q<p<N+\nu$**，而**$1\le q^*<\frac{(N+\nu)q}{N+\nu-q}$**，根据**[7]**中定理，**

$$\int_\Omega (\frac{1}{n}+|x|^2)^{\nu/2}\cdot |Du_n|^q dx \le C+C\left(\int_\Omega |u_n|^{q^*}(\frac{1}{n}+|x|^2)^{\nu/2}dx\right)^{(1-\frac{q}{p})\frac{1}{q^*}q^*}$$

$$\le C+C\left(\int_\Omega (\frac{1}{n}+|x|^2)^{\nu/2}\cdot |Du_n|^q dx\right)^{\frac{q^*}{q}(1-\frac{q}{p})}.$$

若设$y_n=\int_\Omega (\frac{1}{n}+|x|^2)^{\nu/2}\cdot |Du_n|^q dx$**，则有**

$$y_n\le C+C(y_n)^{\frac{q^*}{q}(1-\frac{q}{p})}.$$

不难证明$\frac{q^*}{q}(1-\frac{q}{p})<1$**，从而可以推出**$y_n\le C$. **此引理得证.**

定理2.2 存在着一子序列(不失一般性仍记为$\{u_n\}$)和一函数u，使得$u_n\to u$在Ω中几乎处处成立.

证明 设η是个很小的正数，$B(0,\eta)$是以0为中心η为半径的"球"，$\Omega_\eta=\Omega\setminus\overline{B(0,\eta)}$，则对于$q\in(1,q_c)$，

$$\int_{\Omega_\eta}|Du_n|^q dx \le \frac{1}{\eta}\int_{\Omega_\eta}|x|^\nu\cdot |Du_n|^q dx dt \le C(\eta) \quad (\text{与 } n \text{ 无关}),$$

于是$\{u_n\}$在$W_0^{1,q}(\Omega_\eta)$中保持一致有界，因为此时$W_0^{1,q}(\Omega_\eta)$是自反的，所以存在着一个子列(与η有关，记为$\{U_{n\eta}\}$)和某一函数u，使得$U_{n\eta}\rightharpoonup u$在$W_0^{1,q}(\Omega_\eta)$中弱收敛. 又$\forall s\in[1,q^*)$，其

中 $\frac{1}{q^*}=\frac{1}{q}-\frac{1}{N}$, $W_0^{1,q}(\Omega_\eta)\subset L^s(\Omega_\eta)$ 为紧嵌入, 可得 $U_{n\eta}\rightharpoonup u$ 在 $L^s(\Omega_\eta)$ 中强收敛, 从而在子列意义下, $U_{n\eta}\rightharpoonup u$ 在 Ω_η 中几乎处处成立.

现在置 $J_n=\int_\Omega |u_n-u|^\beta\cdot|x|^\nu dx$, $0<\beta<q$. 如果有 $J_n\to 0$, 则可得 $u_n\to u$ 在 Ω 中几乎处处成立. 用反证法: 假设 $J_n\to 0$ 不成立, 那么存在着一子序列(不失一般性仍记为 $\{u_n\}$), 使得 $\liminf_{n\to\infty} J_n>\widetilde{C}>0$. 但另一方面, 对这样的序列作类似于以上的分析, 记

$$
\begin{aligned}
J_{n\eta}&=\int_\Omega |u_{n\eta}-u|^\delta\cdot|x|^\nu dx\\
&=\int_\Omega |u_{n\eta}-u|^\delta\cdot|x|^\nu dx+\int_{\Omega\setminus\Omega_\eta}|u_{n\eta}-u|^\delta\cdot|x|^\nu dx\overset{\triangle}{=}I_1+I_2.
\end{aligned}
$$

从前述结果和 Vitali 定理得到 $I_1\to 0$; 而

$$
\begin{aligned}
I_2&\le\left(\int_\Omega |u_{n\eta}-u|^q\cdot|x|^\nu dx\right)^{\delta/q}\left(\int_{\Omega\setminus\Omega_\eta}|x|^\nu dx\right)^{1-\frac{\delta}{q}}\\
&\le C\cdot\left\{\mathrm{mes}(\Omega\setminus\Omega_\eta)\right\}^{1-\frac{\delta}{q}}\le C\eta^{N\left(1-\frac{\delta}{q}\right)},
\end{aligned}
$$

这里 mes 表示测度, $\mathrm{mes}(\Omega\setminus\Omega_\eta)=\dfrac{\pi^{N/2}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)}\eta^N$.

所以只要选择 $\eta<\left(\dfrac{\widetilde{C}}{C}\right)^{\frac{1}{N\left(1-\frac{\delta}{q}\right)}}$, 就可使得 $\liminf_{n\to\infty} J_{n\eta}\le C\eta^{N\left(1-\frac{\delta}{q}\right)}<\widetilde{C}$, 而 $\{u_{n\eta}\}$ 是 $\{u_n\}$ 的子序列, 这与假设矛盾, 所以得证 $J_n\to 0$.

引理2.3 设

$$
T_k(\sigma)=\begin{cases} k, & \text{如果 } \sigma>k>0\\ \sigma, & \text{如果 } |\sigma|\le k,\\ -k, & \text{如果 } \sigma<-k.\end{cases}
$$

那么对于定理2.2得到的函数 u, 有 $T_k(u)\in W_0^{1,p}(\Omega,|x|^\nu)$ (也把 $T_k(u)$ 记作 u^k), 其中 $2-\frac{1}{N+\nu}<p\le N$.

证明 从定理2.2和 T_k 的连续性等性质可得 $T_k(u_n)\to T_k(u)$ 在 Ω 中几乎处处成立和 $|T_k(u_n)|\le C$. 再利用 Vitali 定理与嵌入定理, 有 $T_k(u_n)\to T_k(u)$ 在 $L^r(\Omega)$ 里强收敛, 其中 $1<r<\frac{N+\nu}{N+\nu-p}(p-1)$.

另一方面, 取 $v_n=\int_0^{u_n}|T_k'(\sigma)|^p d\sigma\ \left(u_n\in W_0^{1,p}(\Omega)\right)$ 可以得到:

$$
v_n\in W_0^{1,p}(\Omega),\ Dv_n=|T_k'(\sigma)|^p Du_n
$$

几乎处处成立, 和

$$
\|v_n\|_{L^\infty}\le\int|T_k'(\sigma)|^p d\sigma=\int_{\{|\sigma|\le k\}}d\sigma=2k.
$$

将 v_n 作为 $(\widetilde{P}_{2n})$ 的测试函数可得

$$
\int_\Omega\left|\frac{1}{n}+|x|^2\right|^{\nu/2}\hat{a}(u_n,Du_n)\cdot Du_n\cdot|T_k'(u_n)|^p dx=\int_\Omega\mu_n\cdot v_n dx
$$

$$\Rightarrow \alpha\int_\Omega |x|^\gamma |Du_n|^p \cdot |T_k'(u_n)|^p dx \le \|v_n\|_{L^\infty} \cdot \|\mu_n\|_{L^1}$$

$$\Rightarrow \int_\Omega |x|^\gamma \cdot |DT_k'(u_n)|^p dx \le C.$$

即说明 $T_k(u_n)$ 在 $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^\gamma)$ 保持一致有界. 类似于定理2 2的分析得到: 存在一函数 ξ, 使得 $T_k(u_n) \to \xi$ 在 $W_0^{1,p}(\Omega, |x|^\gamma)$ 中弱收敛和 $T_k(u_n) \to \xi$ 在 Ω 中几乎处处成立. 对照前一部分可得 $\xi = T_k(u_n)$, 因此综合得到 $T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^\gamma)$. 证毕.

定理2 3 $Du_n \to Du$ 几乎处处成立, 并且 $\forall q \in [1, q_c)$, $u_n \to u$ 在 $W_0^{1,q}(\Omega, |x|^\gamma)$ 中强收敛.

证明 设

$$\triangle(u_n, u) = |x|^\gamma [\hat{a}(u_n, Du_n) - \hat{a}(u_n, Du)] \cdot (u_n - u) \ge 0.$$

先来证 $\int_\Omega \triangle(u_n, u)^{1/p} dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

对于 $1 < q < p$, 利用 Young 不等式可得:

$$|\triangle(u_n, u)|^{1/p} \le C \cdot |x| \{|u_n| + |Du_n| + |Du|\},$$

从而

$$\int_\Omega \triangle(u_n, u)^{1/p} dx < +\infty.$$

记

$$\int_\Omega \triangle(u_n, u)^{1/p} dx = \int_{\{|u| > k\} \cap \Omega} \triangle(u_n, u)^{1/p} dx + \int_{\{|u| \le k\} \cap \Omega} \triangle(u_n, u)^{1/p} dx$$

$$\stackrel{\triangle}{=} I_1 + I_2.$$

由于

$$k \cdot \mathrm{mes}\{x: |u(x)| > k\} = \int_{\{|u| > k\} \cap \Omega} k dx \le \int_\Omega |u(x)| dx = \|u\|_{L^1(\Omega)}$$

$$\Rightarrow \mathrm{mes}\{x: |u(x)| > k\} \le \frac{1}{k} \|u\|_{L^1(\Omega)}.$$

从而结合 Hölder 不等式和前述结果, 对于 $1 < q < q_C$ 得到:

$$I_1 \le C(|u_n|_{L^q} + |Du_n|_{L^q} + |Du|_{L^q}) \cdot (\mathrm{mes}\{x: |u(x)| > k\})^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\le C \cdot \left|\frac{1}{k}\right|^{1-\frac{1}{q}} \text{(}C\text{ 是与 }n, k\text{ 均无关的常数).}$$

对于 $\epsilon > 0$, 又记

$$I_2 = \int_{\{|u| \le k, |u_n - u| > \epsilon\}} \triangle(u_n, u)^{1/p} dx + \int_{\{|u| \le k, |u_n - u| \le \epsilon\}} \triangle(u_n, u)^{1/p} dx$$

$$\stackrel{\triangle}{=} I_{21} + I_{22}.$$

类似于对 I_1 的分析, 可得

$$I_{21} \le C\left(\mathrm{mes}\{x: |u(x)| \le k, |u_n(x) - u(x)| > \epsilon\}\right)^{1-\frac{1}{q}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

而从引理2 3, 在集合 $\{x: |u(x)| \le k\}$ 上, $u = T_k(u) = u^k \in W_0^{1,p}(\Omega, |x|^\gamma)$, $\triangle(u_n, u^k) \in L^1(\Omega, |x|^\gamma)$. 从而

$$I_{22} \le C\left[\int_{\{|u|\le k,\ |u_n-u|\le\epsilon\}} \triangle(u_n,u^k)\,dx\right]^{1/p}.$$

若取 $H=\{x:|u(x)|\le k,\ |u_n(x)-u(x)|\le\epsilon\}$，则

$$\int_H \triangle(u_n,u^k)\,dx = \int_H |x|^{\nu}[\hat{a}(u_n,Du_n)-\hat{a}(u_n,Du^k)]\cdot D(u_n-u^k)\,dx,$$

引入函数

$$S_\epsilon(\sigma)=\begin{cases}\sigma, & 如果|\sigma|\le\epsilon,\\ \epsilon\cdot\operatorname{sign}(\sigma), & 如果|\sigma|>\epsilon,\end{cases}$$

那么 $S_\epsilon(u_n-u^k)\in W_0^{1,p}(\Omega,|x|^{\nu})$，并且 $\|S_\epsilon\|_{L^\infty}\le\epsilon$ 于是

$$\int_H \triangle(u_n,u^k)\,dx \le \int_\Omega\left(\frac{1}{n}+|x|^2\right)^{\nu/2}[\hat{a}(u_n,Du_n)-\hat{a}(u_n,Du^k)]\cdot DS_\epsilon(u_n,u^k)\,dx$$

$$\le \int_\Omega\left(\frac{1}{n}+|x|^2\right)^{\nu/2}\cdot\hat{a}(u_n,Du_n)\cdot DS_\epsilon(u_n,u^k)\,dx$$

$$-\int_\Omega |x|^{\nu}\cdot\hat{a}(u_n,Du^k)\cdot DS_\epsilon(u_n,u^k)\,dx$$

$$=\int_\Omega S_\epsilon(u_n,u^k)\cdot\mu_n dx-\int_\Omega |x|^{\nu}\cdot\hat{a}(u_n,Du^k)\cdot DS_\epsilon(u_n,u^k)\,dx$$

$$\le\epsilon\cdot\|\mu_n\|_{L^1}-\int_\Omega |x|^{\nu}\cdot\hat{a}(u_n,Du^k)\cdot DS_\epsilon(u_n,u^k)\,dx$$

类似于引理2 3中的分析可得：$S_\epsilon(u_n,u^k)$ 在 $W_0^{1,p}(\Omega,|x|^{\nu})$ 中保持一致有界 $(\forall n\ge1)$；$S_\epsilon(u_n,u^k)\to S_\epsilon(u-u^k)$ 在 Ω 中几乎处处成立，和 $S_\epsilon(u_n-u^k)\rightharpoonup S_\epsilon(u_n,u^k)$ 在 $W_0^{1,p}(\Omega,|x|^{\nu})$ 中弱收敛.

另一方面，从 $\hat{a}$ 的性质，S_ϵ 的定义和定理2 2，利用Vitali定理可得：

$$|x|^{\nu}\cdot\hat{a}(u_n,Du^k)\to|x|^{\nu}\cdot\hat{a}(u,Du^k).$$

在 $|L^{p'}(\Omega)|^N$ 中强收敛 从而

$$\int_\Omega |x|^{\nu}\cdot\hat{a}(u_n,Du^k)\cdot DS_\epsilon(u_n-u^k)\,dx\to\int_\Omega |x|^{\nu}\cdot\hat{a}(u,Du^k)\cdot DS_\epsilon(u-u^k)\,dx$$

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_H\triangle(u_n,u)\,dx\le C\cdot\epsilon-\int_\Omega |x|^{\nu}\cdot\hat{a}(u,Du^k)\cdot DS_\epsilon(u-u^k)\,dx$$

$$=O_\epsilon(1)\to0\quad(当\ \epsilon\to0).$$

综上所述，有

$$\int_\Omega\triangle(u_n,u)^{\frac{1}{p}}dx\le C\cdot\left(\frac{1}{k}\right)^{1-\frac{1}{q}}+C\left(\operatorname{mes}\{x:|u|\le k,\ |u_n-u|>\epsilon\}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$+C\left(\int_H\triangle(u_n,u^k)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$0\le\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega\triangle(u_n,u)^{\frac{1}{p}}dx\le C\left(\frac{1}{k}\right)^{1-\frac{1}{q}}+[O_\epsilon(1)]^{\frac{1}{p}}.$$

再取 $\epsilon\to0$，则

$$0\le\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega\triangle(u_n,u)^{\frac{1}{p}}dx\le C\cdot\left(\frac{1}{k}\right)^{1-\frac{1}{q}}\to0\quad(当\ k\to+\infty),$$

所以得到 $\int_\Omega \triangle(u_n, u)^{\frac{1}{p}} dx \to 0$.

然后，依照[5]中的方法可得：当 $n\to+\infty$时，$\triangle(u_n, u)\to 0$在 Ω 中几乎处处成立；$Du_n(x)\to Du(x)$ 在 Ω 中几乎处处成立. 再利用 Vitali 定理和前述结论获得 $u_n\to u$ 在 $W_0^{1,q}(\Omega, |x|^\nu)$ 中强收敛 $(1\le q< q_c)$.

(三)　取极限回归原问题

在对子问题列 $(\tilde{P}_{2n})$ 的解 u_n 的一致有界估计和收敛性进行研究后，再次利用 Vitali 定理，可得

$$\left|\frac{1}{n}+|x|^2\right|^{\nu/2}\hat{a}(u_n, Du_n)\to|x|^\nu\hat{a}(u, Du)$$

在 $(L^1(\Omega, |x|^\nu))^N$ 强收敛，从而 $\forall\varphi\in\mathbf{D}(\Omega)$

$$\int_\Omega\left|\frac{1}{n}+|x|^2\right|^{\nu/2}\hat{a}(u_n, Du_n)\cdot D\varphi dx\to\int_\Omega|x|^\nu\cdot\hat{a}(u, Du)\cdot D\varphi dx.$$

又由定理1. 1, $\int_\Omega\mu_n\cdot\varphi dx\to<\mu,\varphi>$，于是，至少存在着一个广义解

$$u\in W_0^{1,q}(\Omega, |x|^\nu),\ 1\le q< q_c=\frac{N+\nu}{N+\nu-1}(p-1)$$

满足

$$\int_\Omega|x|^\nu\cdot\hat{a}(u, Du)\cdot D\varphi dx=<\mu,\varphi>,\quad\forall\varphi\in\mathbf{D}(\Omega).$$

到此，定理2. 1证毕.

3　注　记

(1)　当方程 (P_2) 中参数 $\nu=0$时，本文中的主要定理(定理2. 1)所获结论相应取 $\nu=0$，与文章[1]，[2]所处理的问题及其结论一致. 因此可以说，对 (P_2) 的研究比文[1]，[2]更深入. 本文对退化情况的讨论方法，不同于文[3].

(2). 本文仅研究了 $2-\frac{1}{N+\nu}< p\le N$ 的情形. 当 $p>N$ 时，从嵌入定理 $W_0^{1,p}(\Omega)\subset C(\overline{\Omega})$，可以证得 $M(\Omega)\subset W^{-1,p'}(\Omega)$，因此问题转化为经典意义下的求解. 当 $1< p\le 2-\frac{1}{N+\nu}$ 时，如果停留在带权的 Sobolev 空间来寻求解的存在性是不够的，必须另辟途径.

作者衷心感谢导师萧树铁教授和法国 J. M. Rakotoson 教授的指导.

参　考　文　献

[1]　L. Boccardo & T. Gallouet, *Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure as data*, J. Funct. Anal. 87(1989).

[2]　J. M. Rakotoson, *Quasilinear elliptic problems with measures as data*, Differential Integral Equations, 4: 3(1991), 449-457.

[3]　J. M. Rakotoson, *Resolution of the critical case for problems with L^1 data*, Asymptotic Analysis 6

(1993), 285- 293.

[4] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle-théorie et Application*, Masson, 1992.

[5] J. Leray & J. L. Lions, *Quelques résultats de visik sur les problèmes elliptiques nonlinéaires par les méthodes de Minty-Browder*, Bull. Soc. Math. France 93, 1965.

[6] Alois kufner, *Weighted Sobolev Spaces*, TEUBNER-TEXTE Zur Mathematik, Band 31.

[7] J. M. Rakotoson & B. Simon, *Relative rearrangement on a measure space application to the regularity of weighted monotone rearrangement* (*PART* 1, *PART* 2), Appl. Math. Lett. 6: 1(1993), 75 - 82.

A Degenerate Elliptic Equation with Radon-Measures as Data

Gan Xiaoqing

(Nanchang University, 330029)

Abstract

This paper deals with a quasilinear degenerate elliptic equation with Radon- measures as date. By introducing a sequence of approximating problems and their solution, studying priori estimate and convergence, we prove the existence of weak solution in a weighted sobolev space.

Keywords Radon-measure, degenerate elliptic equation, weak solution, priori estimate, convergence.