第18卷第1期　　数学研究与评论　　Vol.18 No.1
1998年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 1998

关于积分 $\int_a^b f(x)g(x)dx$ 的一个不等式的注记*

孙 燮 华

(中国计量学院, 杭州310034)

摘　要　本文推广了有关积分 $\int_a^b f(x)g(x)ds$ 的一个不等式并将其应用于$\wedge$-有界变分函数 $f(x)$ 的 Fourier 系数的估计.

关键词　积分不等式, Fourier 函数, 有界变分.

分类号　AMS(1991) 26D15/CCL O174.1

为节省篇幅本文关于$\wedge B\vee_p$ 函数的概念和记号均与文[1]相同. 在研究函数的 Fourier 级数中Waterman[2]引入了$\wedge B\vee$函数的概念. Waterman[3]、王斯雷[4]、Schramm 和Waterman[5]还对$\wedge B\vee_p$ 函数的 Fourier 数 $a_n(f)$, $b_n(f)$ 作了估计. 本文推广王兴华的一个不等式, 并用它来估计 $a_n(f)$, 建立了精确的估计式.

定理A[6]　设 f 和 g 是$[a,b]$上L-可积的函数, $\int_a^b g(x)dx=0$. 假如由 $G(x)=\int_a^x g(t)dt$ 所定义的函数 G 在$[a,b]$上仅有有限个零点, 且在以相邻两零点为端点的开区间内都恰有一个极值点, 则

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\le 2^{-1/q}\operatorname{ess}\vee_1^{(p)}(f;[a,b])\vee_1^{(q)}(|G|;[a,b]),$$

这里$1\le p\le+\infty$, $1\le q\le+\infty$, 满足$1/p+1/q=1$. 并且常数$2^{-1/q}$是最好可能的.

今将上述不等式推广到$\wedge B\vee_p$ 函数.

定理　在定理A 的条件下, 设函数 G 在$[a,b]$上有 $n+1$个零点, 则对 $f\in\wedge B\vee_p$, $p\ge1$成立

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\le\left(\frac{n}{\sum_{v=1}^{n}1/\lambda_v}\right)^{1/p}2^{-1/q}\operatorname{ess}\vee_1^{(p)}\wedge(f;[a,b])\vee_1^{(q)}\wedge(|G|;[a,b]),\qquad(1)$$

这里的系数 $\left(\sum_{v=1}^{n}1/\lambda_v\right)^{-1}2^{-1/q}$ 和 n 的阶都是最好可能的.

证明　用[6]的记号, 有[6, (21)]

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\le\sup\left\{\sum_{v=1}^{n}\left|\tilde f(\zeta_v)-\tilde f(\eta_v)\right|\int_{\zeta_{v-1}}^{\zeta_v}|g(x)|dx,\right.$$

---

* 1994年12月30日收到

$$\eta_v \in [x_{v-1}, \zeta_v], \zeta_v \in [\zeta_v, x_v], \ v = 1, \cdots, n\}. \tag{2}$$

用Hölder不等式

$$\sum_{v=1}^{n} \left|\tilde{f}(\zeta_v) - \tilde{f}(\eta_v)\right| \int_{x_{v-1}}^{x_v} |g(x)| dx$$
$$\leq \{\sum_{v=1}^{n} \left|\tilde{f}(\zeta_v) - \tilde{f}(\eta_v)\right|^p\}^{1/p} \{\sum_{v=1}^{n} (\int_{x_{v-1}}^{x_v} |g(x)| dx)^q\}^{1/q}. \tag{3}$$

不失一般性, 可以认为$\{\left|\tilde{f}(\zeta_v) - \tilde{f}(\eta_v)\right|^p\}_{v=1}^n$是以递减的顺序排列, 而$\{\frac{1}{\lambda_v}\}_{v=1}^n$也以递减顺序排列, 用Chebyshev不等式, 由上式可得

$$\{\sum_{v=1}^{n} \left|\tilde{f}(\zeta_v) - \tilde{f}(\eta_v)\right|^p\}^{1/p} \leq \left\{\frac{n}{\sum_{v=1}^{n} 1/\lambda_v} \sum_{v=1}^{n} \frac{\left|\tilde{f}(\zeta_v) - \tilde{f}(\eta_v)\right|^p}{\lambda_v}\right\}^{1/p}$$
$$\leq \left(\frac{n}{\sum_{v=1}^{n} 1/\lambda_v}\right)^{1/p} \operatorname{ess} \bigvee_{\wedge}^{(p)} (f; [a, b]).$$

另外, 有[6, (26)]

$$\{\sum_{v=1}^{n} (\int_{x_{v-1}}^{x_v} |g(x)| dx)^q\}^{1/q} = 2^{-1/q} \bigvee_1^{(q)} (|G|; [a, b]).$$

将上面两式代入(3)得

$$\sum_{v=1}^{n} \left|\tilde{f}(\zeta_v) - \tilde{f}(\eta_v)\right| \int_{x_{v-1}}^{x_v} |g(x)| dx$$
$$\leq \left(\frac{n}{\sum_{v=1}^{n} 1/\lambda_v}\right)^{1/p} 2^{-1/q} \operatorname{ess} \bigvee_{\wedge}^{(p)} (f; [a, b]) \bigvee_1^{(q)} (|G|; [a, b]).$$

于是, 由上式和(2)推出(1). 至于系数$(\sum_{v=1}^{n} 1/\lambda_v)^{-1/p} 2^{-1/q}$和阶$n^{1/p}$的最好可能性可由下面的例子获得. 证毕.

现设$f \in \wedge B\bigvee_p$, 来估计$f \in L_{2\pi}$的Fourier系数

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx.$$

注意到

$$G(x) = \int_0^x \cos nt \, dt = \frac{1}{n} \sin nx$$

在$[0, 2\pi]$上有$2n+1$个零点,

$$G(2\pi) = 0, \ \bigvee_1^{(q)} (|G|; [0, 2\pi]) = 4^{1/q}/n^{1/p}.$$

用定理得

$$|a_n(f)| \leq \frac{2}{\pi(\sum_{v=1}^{2n} 1/\lambda_v)^{1/p}} \bigvee_{\wedge}^{(p)} (f; [0, 2\pi]).$$

由[1]可知, 上式的系数和阶都是最好的.

参　考　文　献

[1] 孙燮华, 数学学报, 30(1987), 444- 454.

[2] D. Waterman, Studia Math., 44(1972), 107- 117.

[3] D. Waterman, Proc. Amer. Math. Soc., 74(1979), 119- 123.

[4] 王斯雷, Scientia Sinica (Ser. A), 15(1982), 149- 160.

[5] M. Schramm and D. Waterman, Proc. Amer. Math. Soc., 85(1982), 407- 410.

[6] 王兴华, 中国科学(A 辑), 15(1982), 579- 585.

A Note on an Inequality of Integral $\int_a^b f(x)g(x)dx$

Sun Xiehua

(Division of Math., China Insitute of Metralogy, Hangzhou 310034)

Abstract

We generalize an inequality of integral $\int_a^b f(x)g(x)dx$ and apply it to estimate Fourier coefficient of $f(x)$ of $\wedge$-bounded variation $a_n(f)$ and obtain the best estimation.

Keywords inequality of integral, Fourier coefficient, $\wedge$-bounded variation.