第18卷第1期　　数学研究与评论　　Vol. 18 No. 1
1998年2月　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　Feb. 1998

完备格中的完备子集与它们相关的映射*

岑嘉评　　杨安洲
(香港中文大学数学系)　(北京工业大学数学系, 100022)

摘　要　本文研究了完备格中的各种完备子集与完备格中的各种保序幂等自映射之间的关系, 得到了一系列的新定理, 弄清楚了它们之间的相互关系.

关键词　完备格, 完备子集, 保序映射.
分类号　AMS(1991) 06A23, 54D65/CCL O

定理1 (M. Ward, 1942; A. Tarski, 1955)　设$(L, \le)$是完备格, φ是L到L的保序映射, 令$\mathrm{Fix}(\varphi) = \{x \in L: \varphi(x) = x\}$, 则$\mathrm{Fix}(\varphi)$在$\le$下也是一个完备格.

这里的保序性质是指: $x \le y \Rightarrow \varphi(x) \le \varphi(y)$.

证明　分4步进行.

(1)　令$S = \{x \in L: \varphi(x) \le x\}$. 因为$\varphi(1) \le 1$, 所以$1 \in S$, $S \ne \varnothing$(S为非空). 命$\wedge S = u$(S在L中的下确界). $\forall x \in S$, $u \le x$, $\varphi(u) \le \varphi(x) \le x$, 所以$\varphi(u)$是$S$的一个下界, $\varphi(u) \le u$, $\varphi(\varphi(u)) \le \varphi(u)$, 即$\varphi(u) \in S$, $u \le \varphi(u)$. $\varphi(u) = u$, 得到$u \in \mathrm{Fix}(\varphi)$.

(2)　令$T = \{x \in L: x \le \varphi(x)\}$. 因为$0 \le \varphi(0)$, 所以$0 \in T$, $T \ne \varnothing$. 命$\vee T = v$(T在L中的上确界). $\forall x \in T$, $x \le v$, $x \le \varphi(x) \le \varphi(v)$, 所以$\varphi(v)$是$T$的一个上界, $v \le \varphi(v)$, $\varphi(v) \le \varphi(\varphi(v))$, 即$\varphi(v) \in T$, $\varphi(v) \le v$, $\varphi(v) = v$, 得到$v \in \mathrm{Fix}(\varphi)$.

(3)　$x \in \mathrm{Fix}(\varphi) \Rightarrow \varphi(x) = x$, $\varphi(x) \le x$, $x \in S$; $\mathrm{Fix}(\varphi) \subseteq S$; $u = \wedge S \le x \in S$, $u \le x \in \mathrm{Fix}(\varphi)$, $u \in \mathrm{Fix}(\varphi)$, 所以$u$是$\mathrm{Fix}(\varphi)$中的最小元. $\mathrm{Fix}(\varphi) \subseteq T$, $v = \vee T \ge x \in T$, $v \ge x \in \mathrm{Fix}(\varphi)$, $v \in \mathrm{Fix}(\varphi)$, 所以$v$是$\mathrm{Fix}(\varphi)$中的最大元.

(4)　在$\mathrm{Fix}(\varphi)$中任取$\{x_i \in \mathrm{Fix}(\varphi): i \in I\} \subseteq \mathrm{Fix}(\varphi)$, I为任意地固定的一个集. 令$W = \{x \in L: (\forall i \in I)(x_i \le \varphi(x) \le x)\}$. $i \in I$, $x_i \le 1$, $x_i = \varphi(x_i) \le \varphi(1) \le 1$, 得$1 \in W$, $W \ne \varnothing$. 命$\wedge W = u_0$. $\forall x \in W$, $u_0 \le x \in W$, $\varphi(u_0) \le \varphi(x) \le x \in W$, 所以$\varphi(u_0)$是$W$的一个下界, $\varphi(u_0) \le u_0$; $\forall i \in I$, x_i是W的一个下界, $x_i \le u_0$, $x_i = \varphi(x_i) \le \varphi(u_0) \le u_0$, $x_i = \varphi(x_i) \le \varphi(\varphi(u_0)) \le \varphi(u_0)$, 所以$\varphi(u_0) \in W$, $u_0 \le \varphi(u_0)$, $\varphi(u_0) = u_0$, $u_0 \in \mathrm{Fix}(\varphi)$, u_0是$\{x_i: i \in I\}$的一个上界. 对于$\{x_i: i \in I\}$在$\mathrm{Fix}(\varphi)$中的任一上界u_1, $\forall i \in I$, $x_i \le u_1$, $x_i = \varphi(x_i) \le \varphi(u_1) = u_1$, $x_i \le \varphi(u_1) \le u_1$, $u_1 \in \mathrm{Fix}(\varphi)$, 得到$u_1 \in W$, $u_0 \le u_1$. u_0是$\{x_i \in \mathrm{Fix}(\varphi): i \in I\}$在$\mathrm{Fix}(\varphi)$中的上确界.

由(3), (4)得知: $\mathrm{Fix}(\varphi)$在$\le$下是一个完备格.

* 1994年7月20日收到

问题 若 $(L, \leq)$ 是完备格, φ 是 L 到 L 的映射, 且有 $x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \geq \varphi(y)$, $\forall x, y \in L$, 令 $\mathrm{Fix}(\varphi) = \{x \in L : \varphi(x) = x\}$, 则问: $\mathrm{Fix}(\varphi)$ 在 $\leq$ 下是一个完备格吗?

下面的例子给出这个问题的回答.

例 由右图所给出的 6 点格是一个完备格(作为 L), 令 $\varphi(1) = 0$, $\varphi(0) = 1$, $\varphi(a) = \varphi(b) = a$, $\varphi(c) = \varphi(d) = c$, 则 φ 是 L 到 L 的映射, 且有 $x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \geq \varphi(y)$, $\forall x, y \in L$, $\mathrm{Fix}(\varphi) = \{a, c\}$, 但是 $\{a, c\}$ 是 $\leq$ 下不是完备的(因为在 $\{a, c\}$ 中没有最大、最小元).

定理 2 设 $(L, \leq)$ 是一个完备格, $S \subseteq L$, S 在 $\leq$ 下是一个完备格, 则一定存在有一个 L 的保序的、幂等(定理 1 之逆)的自映射 φ 使得:

$$\mathrm{Fix}(\varphi) = \{x \in L : \varphi(x) = x\} = \mathrm{range}(\varphi) = \{\varphi(x) : x \in L\} = S.$$

证明 令 $\underset{S}{\wedge} S = 0_S$ (即 S 中的最小元), $\overset{S}{\vee} S = 1_S$ (即 S 中的最大元), 所以 $\forall x \in S$ 一定有 $0_S \leq x \leq 1_S$. 记号 $\overset{S}{\vee}$, $\underset{S}{\wedge}$ 表示在 S 中取上确界、下确界, S 中的并、交

对 $x \in L$, 定义 $\varphi(x) = \overset{S}{\vee}\{y : y \in S, y \leq (x \vee 0_S) \wedge 1_S\}$, 则 φ 是 L 到 L 的映射(自映射), $\varphi(x) \in S$.

若 $x \in S$, 则: $0_S \leq x \leq 1_S$, $(x \vee 0_S) \wedge 1_S = x \wedge 1_S = x$, $\varphi(x) = \overset{S}{\vee}\{y : y \in S, y \leq (x \vee 0_S) \wedge 1_S\} = \overset{S}{\vee}\{y : y \in S, y \leq x\} = \overset{S}{\vee}\Sigma$, 因为 $x \in S$, 所以 x 是 Σ 在 S 中的一个上界, $\varphi(x) \leq x$; 因为 $x \leq x$, $x \in S$, 所以 $x \in \Sigma$, $x \leq \varphi(x)$. 故有 $\varphi(x) = x$. 即 $x \in S \Rightarrow \varphi(x) = x$.

若 $x \in S$, 则 $\varphi(x) = x$. 即有 $S \subseteq \mathrm{Fix}(\varphi) = \{x \in L : \varphi(x) = x\}$.

若 $x \in \mathrm{Fix}(\varphi)$, 则 $\varphi(x) = x$, $x = \varphi(x) \in \mathrm{range}(\varphi) = \{\varphi(x) : x \in L\}$, 即

$$\mathrm{Fix}(\varphi) \subseteq \mathrm{range}(\varphi).$$

若 $y \in \mathrm{range}(\varphi)$, 则存在 $x \in L$ 使得 $y = \varphi(x)$, $\varphi(x) \in S$, 即 $\mathrm{range}(\varphi) \subseteq S$. $S \subseteq \mathrm{Fix}(\varphi) \subseteq \mathrm{range}(\varphi) \subseteq S$, 所以 $\mathrm{Fix}(\varphi) = \mathrm{range}(\varphi) = S$.

若 $x \in L$, 则 $\varphi(x) \in \mathrm{range}(\varphi) = S = \mathrm{Fix}(\varphi)$, $\varphi(x) \in \mathrm{Fix}(\varphi)$, 所以 $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x)$ (即幂等性质).

若 $x_1 \leq x_2$, 则:

$$(x_1 \vee 0_S) \wedge 1_S \leq (x_2 \vee 0_S) \wedge 1_S,$$

$$\varphi(x_1) = \overset{S}{\vee}\{y : y \in S, y \leq (x_1 \vee 0_S) \wedge 1_S\} = \overset{S}{\vee}\Sigma_1,$$

$$\varphi(x_2) = \overset{S}{\vee}\{y : y \in S, y \leq (x_2 \vee 0_S) \wedge 1_S\} = \overset{S}{\vee}\Sigma_2.$$

$y \in \Sigma_1$ 时, $y \in S$, $y \leq (x_1 \vee 0_S) \wedge 1_S \leq (x_2 \vee 0_S) \wedge 1_S$, 所以 $y \in \Sigma_2$, 即 $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$, $\overset{S}{\vee}\Sigma_1 \leq \overset{S}{\vee}\Sigma_2$, $\varphi(x_1) \leq \varphi(x_2)$ (保序性质). φ 是保序的幂等的自映射, 且有 $\mathrm{Fix}(\varphi) = \mathrm{range}(\varphi) = S$.

定理 3 设 $(L, \leq)$ 是一个完备格, $S \subseteq L$, S 在 $\leq$ 下是一个完备格 $\Leftrightarrow$ 存在一个 L 的保序的幂等的自映射 φ 使得 $\mathrm{Fix}(\varphi) = \mathrm{range}(\varphi) = S$.

由定理 2, 定理 1 即得必要性与充分性, 知定理 3 成立.

定理 4 设 $(L, \leq)$ 是一个完备格, φ 是 L 的保序的自映射, 则一定存在一个 L 的保序的、幂等的自映射 ψ 使得 $\mathrm{Fix}(\varphi) = \mathrm{Fix}(\psi) = \mathrm{range}(\psi)$, $\psi\varphi$ 也是保序的、幂等的自映射且 $\mathrm{Fix}(\psi\varphi) = \mathrm{range}(\psi\varphi) = \mathrm{Fix}(\varphi) = \mathrm{Fix}(\psi\varphi)$.

定理 5　设$(L, \leq)$是完备格, $S \subseteq L$, S 具有性质: $x_i \in S, \forall i \in I \Rightarrow \bigvee_{i \in I} x_i \in S$, 则存在有 L 的自映射 φ 使得: 1) $\varphi(x) \leq x, \forall x \in L$. 2) $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x), \forall x \in L$. 3) $\varphi(\varphi(x) \wedge \varphi(y)) = \varphi(x \wedge y), \forall x, y \in L$.

证明　对 $x \in L$, 令 $\varphi(x) = \vee\{y \in S: y \leq x\}$.

$$\forall x \in L, \varphi(x) = \vee\{y \in S: y \leq x\} \leq x. \tag{1}$$

若 $u \leq v$, 则

$$\varphi(u) = \vee\{y \in S: y \leq u\} = \vee \Sigma_1,$$

其中 $\Sigma_1 = \{y \in S: y \leq u\}$, $\varphi(v) = \vee\{y \in S: y \leq v\} = \vee \Sigma_2$, 这里的 $\Sigma_2 = \{y \in S: y \leq v\}$;

$$y \in \Sigma_1 \Rightarrow y \in S, y \leq u \leq v, y \in \Sigma_2, \Sigma_1 \subseteq \Sigma_2, \vee \Sigma_1 \leq \vee \Sigma_2,$$

所以

$$\varphi(u) \leq \varphi(v).$$

若 $x \in S$, 则 $\varphi(x) = \vee\{y \in S: y \leq x\} = \vee \Sigma$, 其中 $\Sigma = \{y \in S: y \leq x\}$, $x \in S$, $x \leq x$, $x \in \Sigma$, $\vee \Sigma \geq x$, $\varphi(x) = \vee \Sigma \geq x$; 加上(1): $\varphi(x) \leq x$, 即有 $\varphi(x) = x$. $\varphi(x) = \vee\{y \in S: y \leq x\} = \vee \Sigma_1$, $\Sigma_1 = \{y \in S: y \leq x\}$, $\varphi(\varphi(x)) = \vee\{y \in S: y \leq \varphi(x)\} = \vee \Sigma_2$, $\Sigma_2 = \{y \in S: y \leq \varphi(x)\}$, $y \in \Sigma_1 \Rightarrow y \in S, y \leq x, y = \varphi(y) \leq \varphi(x), y \in \Sigma_2, \Sigma_1 \subseteq \Sigma_2, \vee \Sigma_1 \leq \vee \Sigma_2, \varphi(x) \leq \varphi(\varphi(x))$; 加上(1): 在 $\varphi(x) \leq x$ 中代入 $\varphi(x)$, $\varphi(\varphi(x)) \leq \varphi(x)$, 有 $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x)$.

$$\left.\begin{array}{ll} x \wedge y \leq x & \varphi(x \wedge y) \leq \varphi(x) \\ x \wedge y \leq y & \varphi(x \wedge y) \leq \varphi(y) \end{array}\right\} \varphi(x \wedge y) \leq \varphi(x) \wedge \varphi(y)$$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(x) \leq x \\ \varphi(y) \leq y \end{array}\right\} \varphi(x) \wedge \varphi(y) \leq x \wedge y$$

$$\varphi(x \wedge y) \leq \varphi(x) \wedge \varphi(y) \leq x \wedge y$$

$$\varphi(x \wedge y) = \varphi(\varphi(x \wedge y)) \leq \varphi(\varphi(x) \wedge \varphi(y)) \leq \varphi(x \wedge y)$$

$$\varphi(\varphi(x) \wedge \varphi(y)) = \varphi(x \wedge y).$$

$$S \subseteq \mathrm{Fix}(\varphi) \subseteq \mathrm{range}(\varphi) \subseteq S \qquad (\varphi(x) \in S)$$

定理 6　设$(L, \leq)$是完备格, φ 是 L 的自映射满足:

1° $\varphi(x) \leq x, \forall x \in L$;

2° $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x), \forall x \in L$;

3° $\varphi(\varphi(x) \wedge \varphi(y)) = \varphi(x \wedge y), \forall x, y \in L$.

则

1)　$\mathrm{Fix}(\varphi) = \mathrm{range}(\varphi)$;

2)　$x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$;

3)　$x_i \in \mathrm{Fix}(\varphi), \forall i \in I \Rightarrow \bigvee_{i \in I} x_i \in \mathrm{Fix}(\varphi)$.

证明　1) $x \in \mathrm{Fix}(\varphi) = \{x \in L: \varphi(x) = x\} \Rightarrow \varphi(x) = x$, $x = \varphi(x) \in \mathrm{range}(\varphi) = \{\varphi(x): x \in L\}$, $\mathrm{Fix}(\varphi) \subseteq \mathrm{range}(\varphi)$.

$y \in \mathrm{range}(\varphi) \Rightarrow \exists x \in L, y = \varphi(x), \varphi(y) = \varphi(\varphi(x)) \overset{2°}{=} \varphi(x) = y$, $y \in \mathrm{Fix}(\varphi)$, $\mathrm{range}(\varphi) \subseteq \mathrm{Fix}(\varphi)$, 所以 $\mathrm{Fix}(\varphi) = \mathrm{range}(\varphi)$.

2)　若 $x \leq y$, 则 $x \wedge y = x$, 用 3°, 1° 得

$$\varphi(x) = \varphi(x \wedge y) = \varphi(\varphi(x) \wedge \varphi(y)) \leq \varphi(x) \wedge \varphi(y) \leq \varphi(x),$$

所以 $\varphi(x) \wedge \varphi(y) = \varphi(x)$, $\varphi(x) = \varphi(x) \wedge \varphi(y) \leq \varphi(y)$, **得到** $\varphi(x) \leq \varphi(y)$.

3) **若** $\forall i \in I, x_i \in \mathrm{Fix}(\varphi)$, **则**:

$\forall i \in I, x_i \leq \bigvee_{i\in I} x_i, x_i = \varphi(x_i) \leq \varphi(\bigvee_{i\in I} x_i) \leq \bigvee_{i\in I} x_i$ (**用** 2) **与** 1°), $\bigvee_{i\in I} x_i \leq \varphi(\bigvee_{i\in I} x_i) \leq \bigvee_{i\in I} x_i$,

所以

$$\varphi(\bigvee_{i\in I} x_i) = \bigvee_{i\in I} x_i,\ \bigvee_{i\in I} x_i \in \mathrm{Fix}(\varphi).$$

定理 7 **设** $(L, \leq)$ **是完备格**, $S \subseteq L$, S **具有性质**:

1) $x_i \in S, \forall i \in I \Rightarrow \bigvee_{i\in I} x_i \in S$;

2) $x \in S, y \in S \Rightarrow x \wedge y \in S$.

则存在有 L **的自映射** φ**使得**:

1° $\varphi(x) \leq x, \forall x \in L$;

2° $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x), \forall x \in L$;

3° $\varphi(x) \wedge \varphi(y) = \varphi(x \wedge y), \forall x, y \in L$.

证明 **与定理** 5 **的相同之处不说了**. $\varphi(\varphi(x) \wedge \varphi(y)) = \varphi(x \wedge y)$, $\varphi(x) = \vee \{y \in S: y \leq x\} \in S$, $\varphi(y) \in S$, **用** 2) **知**

$$\varphi(x) \wedge \varphi(y) \in S, \varphi(\varphi(x) \wedge \varphi(y)) = \varphi(x) \wedge \varphi(y),$$

所以 $\varphi(x) \wedge \varphi(y) = \varphi(x \wedge y)$.

定理 8 **设** $(L, \leq)$ **是完备格**, φ**是** L **的自映射满足**:

1° $\varphi(x) \leq x, \forall x \in L$;

2° $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x), \forall x \in L$;

3° $\varphi(x) \wedge \varphi(y) = \varphi(x \wedge y), \forall x, y \in L$.

则

1) $\mathrm{Fix}(\varphi) = \mathrm{range}(\varphi)$;

2) $x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$;

3) $x_i \in \mathrm{Fix}(\varphi), \forall i \in I \Rightarrow \bigvee_{i\in I} x_i \in \mathrm{Fix}(\varphi)$;

4) $x \in \mathrm{Fix}(\varphi), y \in \mathrm{Fix}(\varphi) \Rightarrow x \wedge y \in \mathrm{Fix}(\varphi)$.

注 **定理** 7, **定理** 8 **显然是内部算子定理的推广**, **它的对偶形式显然是** Kuratowski **闭包公理的推广**.

证明 **与定理** 7 **的相同之处不说了**.

2) **的证明可用**: $x \leq y \Rightarrow x \wedge y = x$, $\varphi(x) = \varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y) \leq \varphi(y)$. **也可用** 3°, 2°, $\varphi(x) \wedge \varphi(y) = \varphi(x \wedge y)$, $\varphi(\varphi(x) \wedge \varphi(y)) = \varphi(\varphi(x \wedge y)) = \varphi(x \wedge y)$. **然后用定理** 7 **中的方法证明**

4) **的证明**: $x \in \mathrm{Fix}(\varphi) = \mathrm{range}(\varphi)$, $y \in \mathrm{Fix}(\varphi) = \mathrm{range}(\varphi) \Rightarrow \exists u, v \in L$ **使得** $\varphi(u) = x$, $\varphi(v) = y$, $x \wedge y = \varphi(u) \wedge \varphi(v) = \varphi(u \wedge v) \in \mathrm{range}(\varphi) = \mathrm{Fix}(\varphi)$, **所以** $x \wedge y \in \mathrm{Fix}(\varphi)$.

定理 9 **设** $(L, \leq)$ **是完备格**, $S \subseteq L$, S **具有性质**:

1) $x_i \in S, \forall i \in I$ (I **为任意的**) $\Rightarrow \bigvee_{i\in I} x_i \in S$;

2) $x \in S, y \in S \Rightarrow x \wedge y \in S$;

3) $\vee S = 1$.

则存在有 L **的自映射** φ**使得**:

1° $\varphi(x) \leq x, \forall x \in L$;

2° $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x), \forall x \in L$;

3° $\varphi(x) \wedge \varphi(y) = \varphi(x \wedge y), \forall x, y \in L$;

4° $\varphi(1) = 1$.

定理 10 **设**$(L, \leq)$ **是完备格**, φ**是** L **的自映射满足**:

1° $\varphi(x) \leq x, \forall x \in L$;

2° $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x), \forall x \in L$.

3° $\varphi(x) \wedge \varphi(y) = \varphi(x \wedge y), \forall x, y \in L$;

4° $\varphi(1) = 1$.

则

1) $\mathrm{Fix}(\varphi) = \mathrm{range}(\varphi)$;

2) $x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y), \forall x, y \in L$;

3) $x_i \in \mathrm{Fix}(\varphi), \forall i \in I \Rightarrow \bigvee_{i \in I} x_i \in \mathrm{Fix}(\varphi)$;

4) $x \in \mathrm{Fix}(\varphi), y \in \mathrm{Fix}(\varphi) \Rightarrow x \wedge y \in \mathrm{Fix}(\varphi)$;

5) $1 \in \mathrm{Fix}(\varphi)$.

注 **定理** 9, **定理** 10 **显然是拓扑空间理论中内部算子在完备格论中的表现形式**

定理 11 **设**$(L, \leq)$ **是完备格**, $S \subseteq L$, S **具有性质**:

1) $x_i \in S, \forall i \in I$ (I **为任意**) $\Rightarrow \bigvee_{i \in I} x_i \in S$;

2) $x_j \in S, \forall j \in J \Rightarrow \bigwedge_{i \in J} x_j \in S$.

则存在有 L **的自映射** φ**使得**:

1° $\varphi(x) \leq x, \forall x \in L$;

2° $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x), \forall x \in L$;

3° $\bigwedge_{i \in J} \varphi(x_j) = \varphi(\bigwedge_{j \in J} x_j), \forall i \in J, x_j \in L$ (**这里的** J **可以是固定的**, **也可以是任意的**, $|J| \geq 2$).

定理 12 **设**$(L, \leq)$ **是完备格**, φ**是** L **的自映射满足**:

1° $\varphi(x) \leq x, \forall x \in L$;

2° $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x), \forall x \in L$;

3° $\bigwedge_{j \in J} \varphi(x_j) = \varphi(\bigwedge_{j \in J} x_j), \forall j \in J, x_j \in L$.

则

1) $\mathrm{Fix}(\varphi) = \mathrm{range}(\varphi)$;

2) $x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y), \forall x, y \in L$;

3) $x_i \in \mathrm{Fix}(\varphi), \forall i \in I$, I **为任意** $\Rightarrow \bigvee_{i \in I} x_i \in \mathrm{Fix}(\varphi)$;

4) $x_j \in \mathrm{Fix}(\varphi), \forall j \in J \Rightarrow \bigwedge_{j \in J} x_j \in \mathrm{Fix}(\varphi)$ (**这里的** J **可以是固定的**, **也可以是任意的**, $|J| \geq 2$).

定理 13 **设**$(L, \leq)$ **是完备格**, J **是可以任意地固定的**, **或者可以是任意的**, $|J| \geq 2$, I **为**

任意的, $S \subseteq L$ 满足: $x_i \in S, \forall i \in I \Rightarrow \bigvee_{i\in I} x_i \in S$; $x_j \in S, \forall j \in J \Rightarrow \bigwedge_{j\in J} x_j \in S$; $\vee S = 1$ 的充要条件是: 存在有 L 的自映射 φ 满足:

$\mathrm{Fix}(\varphi) = \mathrm{range}(\varphi) = S$; $\varphi(x) \leq x, \forall x \in L$; $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x), \forall x \in L$; $\bigwedge_{j\in J}\varphi(x_j) = \varphi(\bigwedge_{j\in J} x_j), \forall j \in J, x_j \in L$; $\varphi(1) = 1$; $x_i \in \mathrm{Fix}(\varphi), \forall i \in I \Rightarrow \bigvee_{i\in I} x_i \in \mathrm{Fix}(\varphi)$; $x_j \in \mathrm{Fix}(\varphi), \forall j \in J \Rightarrow \bigwedge_{j\in J} x_j \in \mathrm{Fix}(\varphi)$.

定理 14 设 $(B, \leq, \vee, \wedge, {}^*, 0, 1)$ 为完备的布尔代数, J 可以是任意地固定的, 或者可以是任意, $|J| \geq 2$, I 为任意, $S \subseteq B$, S 是 B 的子代数, 满足: $x_i \in S, \forall i \in I \Rightarrow \bigvee_{i\in I} x_i \in S$; $x_j \in S, \forall j \in J \Rightarrow \bigwedge_{j\in J} x_j \in S$ 的充要条件是: 存在有 B 的自映射 φ 满足: $\mathrm{Fix}(\varphi) = \mathrm{range}(\varphi) = S$; $\varphi(x) \leq x, \forall x \in L$; $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x), \forall x \in L$; $\bigwedge_{j\in J}\varphi(x_j) = \varphi(\bigwedge_{j\in J} x_j), \forall j \in J, x_j \in L$; $\varphi(1) = 1$; $x_i \in \mathrm{Fix}(\varphi), \forall i \in I \Rightarrow \bigvee_{i\in I} x_i \in \mathrm{Fix}(\varphi)$; $x_j \in \mathrm{Fix}(\varphi), \forall j \in J \Rightarrow \bigwedge_{j\in J} x_j \in \mathrm{Fix}(\varphi)$.

定理 15 设 $(B, \leq, \vee, \wedge, {}^*, 0, 1)$ 为完备的布尔代数, J 可以是任意地固定的, 或者可以任意, $|J| \geq 2$, I 是任意, $S \subseteq B$, S 是 B 的子代数, 满足: $x_i \in S, \forall i \in I \Rightarrow \bigvee_{i\in I} x_i \in S$; $x_j \in S, \forall j \in J \Rightarrow \bigwedge_{j\in J} x_j \in S$ 的充要条件是: 存在有 B 的自映射 φ 满足: $\mathrm{Fix}(\varphi) = \mathrm{range}(\varphi) = S$; $(\bigwedge_{j\in J} a_j) \wedge (\bigwedge_{j\in J}\varphi(a_j)) \wedge \varphi(\varphi(b)) = \varphi(\bigwedge_{j\in J} a_j \wedge b) \vee (\varphi(1))^*, \forall j \in J, a_j \in B$; $a_i \in \mathrm{Fix}(\varphi), \forall i \in I \Rightarrow \bigvee_{i\in I} a_i \in \mathrm{Fix}(\varphi)$; $a_j \in \mathrm{Fix}(\varphi), \forall j \in J \Rightarrow \bigwedge_{j\in J} a_j \in \mathrm{Fix}(\varphi)$.

参 考 文 献

[1] G. Birkhoff, *Lattice theory*, New York, 1948.

[2] P. R. Halmos, *Lectures on Boolean Algebras*, Princeton, New Jersey, 1963.

[3] K. Kuratowski and A. Mostowski, *Set Theory*, Amsterdam, 1976.

Complete Subsets and Their Corresponding Functions in a Complete Lattice

Karping Shum

(Dept. of Math., The Chinese University of Hong Kong)

Yang Anzhou

(Dept. of Math., Beijing Polytechnic University, 100022)

Abstract

In this paper, relationships between various complete subsets and their corresponding functions in a complete lattice are investigated, several characterization theorems are obtained.

Keywords complete lattice, complete subset, isotone mapping.