

关于局部紧度量空间的映象*

李招文

李进金

(长沙水电师范学院, 长沙410077) (漳州师范学院, 漳州363000)

摘 要 本文借助于商映射、伪开映射和闭映射建立局部紧度量空间和几类具有某些特定性质 $m k$ -系之间的联系, 作为推论 得到: 双商 ss -映射保持局部紧度量空间

关键词 $m k$ -系, 商映射, 伪开映射, 闭映射

分类号 AM S(1991) 46A 16/CCL O 189.1

利用映射建立各种拓扑空间之间的联系是一般拓扑学研究的重要课题之一. 1972年 E. Michael 分别利用开映射, 可数双商映射, 伪开映射和商映射建立仿紧局部紧空间与局部紧空间, 强 $k^\perp$ 空间, $k^\perp$ 空间和 k -空间之间的联系. 1982年 Y. Tanaka 利用 1964年 A. Arhangel'skii 引进的 k -系概念, 研究了一些具有某种附加性质 k -系的空间与仿紧局部紧空间之间的联系. 近来林寿分别利用闭映射、伪开映射和商映射建立另一些具有附加性质 k -系的空间和仿紧局部紧空间之间的联系. 此外, 序列空间等价于某一局部紧度量空间的商映象, Frechet 空间等价于某一局部紧度量空间的伪开映象. 文[10]研究了局部紧度量空间的商 s -映象、伪开 s -映象和闭 s -映象的特征, 受上述论文启发, 本文借助于商映射, 伪开映射和闭映射建立局部紧度量空间与几类具有某些特定 k -系(即本文定义的 $m k$ -系)的空间之间的联系.

本文所论空间均指满足正则且 T_1 分离性公理的拓扑空间, 映射均指连续满映射.

设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的一个复盖, 称 X 关于 $\mathcal{P}$ 具有弱拓扑, 如果 X 的子集使得对于 $P \in \mathcal{P}, A \cap P$ 是子空间 P 的闭子集, 那么 A 是 X 的闭子集. 由空间 X 的某些紧子集组成的 X 的复盖 $\mathcal{P}$ 称为 X 的 k -系^[2], 如果 X 关于 $\mathcal{P}$ 具有弱拓扑. 若 X 的 k -系 $\mathcal{P}$ 是由 X 的可度量子空间组成的, 那么 $\mathcal{P}$ 称为 X 的 $m k$ -系. 若 X 关于其全体紧子集组成的族具有弱拓扑, 那么称 X 为 k -空间. 空间 X 的子族 $\mathcal{P}$ 称为 X 的 k -网, 如果对于 X 的紧子集 K 和 K 的开邻域 U , 存在 $\mathcal{P}$ 的有限子族 $\mathcal{P}'$ 使得 $K \subset \bigcup \mathcal{P}' \subset U$. 若 X 的 k -网 $\mathcal{P}$ 是由其紧子集组成的, 那么 $\mathcal{P}$ 称为 X 的紧 k -网. 空间 X 称为 $k^\perp$ 空间, 如果 $X = \text{CL}(A)$, 那么存在 X 的紧子集 K 使得 $X = \text{CL}(A \cap K)$. 空间 X 称为 k_R -空间, 如果 X 是完全正则空间, 并且对于 X 上的任意实值函数 f , 若 f 限制于 X 的所有紧子集上是连续函数, 则 f 是 X 上的连续函数. 显然, Frechet-空间和局部紧空间都是 $k^\perp$ 空间, 有 k -系的空间和 $k^\perp$ 空间都是 k -空间, 完全正则的 k -空间是 k_R -空间.

例 1 由于序列空间关于其全体紧度量子空间组成的复盖具有弱拓扑, 那么该复盖就是这序列空间的 $m k$ -系.

* 1994年7月2日收到 国家自然科学基金资助项目.

设 f 是空间 X 到空间 Y 上的连续函数 f 称为 R -商映射, 如果 g 是 Y 上的实值函数, 并且复合函数 $g \circ f$ 连续, 那么 g 是连续函数; f 称为紧复盖映射, 如果 K 是 Y 的紧子集, 那么存在 X 的紧子集 L 使得 $f(L) = K$; f 称为 s -映射, 如果对于 $y \in Y, f^{-1}(y)$ 是 X 的可分子空间; f 称为 ss -映射, 如果对于 $y \in Y$, 存在 y 在 Y 中的开邻域 V 使得 $f^{-1}(V)$ 是 X 的可分子空间; f 称为双商映射, 如果对于 $y \in Y$ 和 X 的开子集族 $\mathbf{U}$ 满足 $f^{-1}(y) \subset \bigcup \mathbf{U}$, 存在 $\mathbf{U}$ 的有限子族 $\mathbf{U}'$ 使得 $y \in \text{Int} f(\bigcup \mathbf{U}')$.

定理 2 下列条件相互等价:

- (1) X 是某一局部紧度量空间的商 ss -映象
- (2) X 是具有局部可数 $m k$ -系的空间
- (3) X 是具有 σ -局部可数 $m k$ -系的空间
- (4) X 是具有星可数 $m k$ -系的空间
- (5) X 是某一局部紧度量空间的 R -商 ss -映象

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 设 X 是某一局部紧度量空间的商 ss -映象, 于是, 存在局部紧度量空间 M 及从 M 到 X 的商 ss -映射 f , 由于 M 是局部紧空间, 则对于 $m \in M$, 存在 M 的紧子集 K_m 使得 $m \in \text{Int}(K_m)$ 又由于 M 是仿紧空间, 则存在 M 的开复盖 $\{\text{Int}(K_m) : m \in M\}$ 的局部有限闭加细 $\mathbf{F}$, 设 $\mathbf{F} = \{F_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$. 对 $\alpha \in \Lambda$, 存在 $m(\alpha) \in M$ 使得 $F_\alpha \subset \text{Int}(K_{m(\alpha)})$, 从而 $F_\alpha \subset K_{m(\alpha)}$, 于是 F_α 是 M 的紧子集, 因此 $\{F_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ 是由 M 的紧度量子空间组成的局部有限闭复盖, 对于 $\alpha \in \Lambda$, 令 $P_\alpha = f(F_\alpha)$. 因为连续函数保持紧度量性, 所以每个 P_α 都是 X 的紧度量子空间, 对于 $x \in X$, 由 f 是 ss -映射知, 存在 x 在 X 中的开邻域 V 使得 $f^{-1}(V)$ 是 M 的可分子空间, 从而 $f^{-1}(V)$ 是 M 的 L indelöf 子空间, 由于 L indelöf 空间的局部有限集族是可数的, 则 $\{F_\alpha : \alpha \in \Lambda \text{ 且 } F_\alpha \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset\}$ 是可数的, 于是 $\{f(F_\alpha) : \alpha \in \Lambda \text{ 且 } f(F_\alpha) \cap V \neq \emptyset\}$ 是可数的, 即 $\mathbf{P} = \{P_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ 是 X 的局部可数复盖. 下证 $\mathbf{P}$ 是 X 的 k -系. 设 A 是 X 的子集使得对于 $\alpha \in \Lambda, A \cap P_\alpha$ 是子空间 P_α 的闭子集, 倘若 A 不是 X 的闭子集, 由于 f 是商映射, 则 $f^{-1}(A)$ 不是 M 的闭子集, 又由于 M 是 k -空间, 于是存在 M 的紧子集 K 使得 $f^{-1}(A) \cap K$ 不是子空间 K 的闭子集, 从而 $f^{-1}(A) \cap K$ 不是 M 的闭子集. 因为 $\{F_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ 是局部有限的, 所以存在 Λ 的有限子集 Λ' 使得 $K \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda'} F_\alpha$, 因而存在 $\alpha \in \Lambda'$ 使得 $f^{-1}(A) \cap F_\alpha$ 不是 M 的闭子集, 又因为 $f^{-1}(A \cap f(F_\alpha)) = f^{-1}(A) \cap F_\alpha$, 所以 $A \cap f(F_\alpha)$ 不是 X 的闭子集, 即 $A \cap P_\alpha$ 不是子空间 P_α 的闭子集, 矛盾. 故 $\mathbf{P}$ 是 X 的 k -系. 这样, X 具有局部可数 $m k$ -系 $\mathbf{P}$.

(2) $\Rightarrow$ (3) 显然

(3) $\Rightarrow$ (4) 设 $\mathbf{P}$ 是 X 的 σ -局部有数 $m k$ -系. 因为紧空间的局部可数集族是可数族, 所以 $\mathbf{P}$ 是 X 的星可数 $m k$ -系.

(4) $\Rightarrow$ (1) 设 $\mathbf{P}$ 是 X 的星可数 $m k$ -系, 由于 $\mathbf{P}$ 是星可数的, 分解 $\mathbf{P} = \{\mathbf{P}_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$, 其中每个 $\mathbf{P}_\alpha$ 是 $\mathbf{P}$ 的可数子族且对于 $\alpha \neq \beta$, 有 $(\mathbf{P}_\alpha) \cap (\bigcup \mathbf{P}_\beta) = \emptyset$. 对于 $\alpha \in \Lambda$, 令 $X_\alpha = \bigcup \mathbf{P}_\alpha$. 若 $P \in \mathbf{P}$, 则 $P \cap X_\alpha$ 或者是 P , 或者是空集, 即 $P \cap (X - X_\alpha)$ 或者是 $\emptyset$, 或者是 P . 由于 $\mathbf{P}$ 是 X 的 k -系, 那么 X_α 是 X 的既开又闭的子集, 因而 $\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ 是 X 的由互不相交, 既开又闭的子空间组成的复盖, 故 $X = \bigoplus \{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$. 对于 $\alpha \in \Lambda$, 设 $A \subset X_\alpha$ 使得对于 $P \in \mathbf{P}_\alpha$, $A \cap P$ 是 X 的子空间 P 的闭子集, 则对于 $P \in \mathbf{P}_\alpha, A \cap P$ 是 X 的子空间 P 的闭子集, 由于对

于 $P \setminus \mathbf{P}_{\alpha} A \cap P = \emptyset$ 是 X 的子空间 P 的闭子集, 并且 $\mathbf{P}$ 是 X 的 k -系, 因此 A 是 X 的闭子集, 于是 A 是 X 的子空间 X_{α} 的闭子集, 这样 $\mathbf{P}_{\alpha}$ 是 X 的子空间 X_{α} 的可数 $m k$ -系. 置 $M_{\alpha} = \bigoplus \{P: P \in \mathbf{P}_{\alpha}\} (\alpha \in \Lambda)$. 因为局部紧性及可度量性关于不相交的拓扑和保持, 所以每个 M_{α} 是局部紧度量空间, 让 f_{α} 是从 M_{α} 到 X_{α} 上的自然映射, 由于 $\mathbf{P}_{\alpha}$ 是 X_{α} 的 k -系, 则每个 f_{α} 是商映射, 令 $f = \bigoplus \{f_{\alpha}: \alpha \in \Lambda\}$, 那么 f 是从局部紧度量空间 $M = \bigoplus \{M_{\alpha}: \alpha \in \Lambda\}$ 到 X 上的商映射, 对于 $x \in X$, 存在 X 的开子集 X_{α} 使得 $x \in X_{\alpha}$, 这时 $f^{-1}(X_{\alpha}) = M_{\alpha}$, 因为 M_{α} 是可数个紧子集之并, 所以 M_{α} 是 M 的 Lindelöf 子空间, 从而 M_{α} 是 M 的可分子空间. 故 f 是 ss -映射.

(1) $\Rightarrow$ (5) 设 X 是某一局部紧度量空间的商 ss -映象. 由 [7, 定理 3], X 是某一局部紧度量空间的紧复盖商 ss -映象, 由于 k -空间的商空间仍是 k -空间, 并且度量空间的 ss -映象是完全正则空间 ([7, 引理 1.3]), 则 X 是完全正则的 k -空间. 因此 X 是 k_R -空间, 因为映满 k_R -空间的紧复盖映射是 R -商映射, 所以 X 是某一局部紧度量空间的 R -商 ss -映象.

(5) $\Rightarrow$ (1) 设 X 是某一局部紧度量空间的 R -商 ss -映象. 由 [7, 定理 2], X 是某一局部紧度量空间的紧复盖 R -商 ss -映象且 X 是具有局部可数紧 k -网的 k_R -空间, 由于具有星可数紧 k -网的 k_R -空间是 k -空间 [8], 则 X 是 k -空间. 因为映满 k -空间的紧复盖映射是商映射, 所以 X 是某一局部紧度量空间的商 ss -映象.

推论 3 具有星可数 $m k$ -系的空间是 k_R -空间.

定理 4 下列条件相互等价:

- (1) X 是某一局部紧度量空间的闭 ss -映象
- (2) X 是某一局部紧度量空间的伪开 ss -映象
- (3) X 是某一局部紧度量空间的闭 s -映象
- (4) X 是某一局部紧度量空间的伪开 s -映象
- (5) X 是有点可数 $m k$ -系的 $k^{\perp}$ 空间
- (6) X 是有点可数紧 k -网的 $k^{\perp}$ 空间

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 显然.

(2) $\Rightarrow$ (5) 利用定理 2 及结论: 伪开映射保持 $k^{\perp}$ 空间.

(3) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (5) $\Leftrightarrow$ (6) 见 [10, 推论 1].

(3) $\Rightarrow$ (1) 设 X 是某一局部紧度量空间的闭 s -映象, 则存在局部紧度量空间 M 及从 M 到 X 上的闭 s -映射 f . 下证 f 是 ss -映射. 对于 $x \in X$, 由于 M 是局部可分度量空间, 并且 $f^{-1}(x)$ 是 M 的 Lindelöf 子空间, 则存在 M 的可分开子集族 $\{V_n: n \in \mathbb{N}\}$ 使得 $f^{-1}(x) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{V_n}$. 置 $V = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{V_n}$, 因为 f 是闭映射, 所以存在 x 在 X 中的开邻域 W 使得 $f^{-1}(W) \subset V$, 由于 V 是 M 的可分子空间和可分性是开遗传的, 则 $f^{-1}(W)$ 是 V 的可分子空间, 从而 $f^{-1}(W)$ 是 M 的可分子空间, 故 f 是 ss -映射, 因此 X 是某一局部紧度量空间的闭 ss -映象.

推论 5 对于 $k^{\perp}$ 空间 X , 下列条件相互等价:

- (1) X 具有局部可数 $m k$ -系
- (2) X 具有 σ -局部有限 $m k$ -系
- (3) X 具有 σ -局部可数 $m k$ -系
- (4) X 具有星可数 $m k$ -系
- (5) X 具有点可数 $m k$ -系

证明 (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5), 及 (2) $\Rightarrow$ (5) 显然 (5) $\Rightarrow$ (1) 由定理 2 和定理 4 即得

(5) $\Rightarrow$ (2) 设 X 是具有点可数 $m k$ - 系的 $k^\perp$ 空间 由定理 4, X 是某一局部紧度量空间的闭 s - 映象, 由 [5, 引理 6], X 具有由紧度量量子空间组成的 σ - 局部有限 k - 网 因为在 k - 空间中, 紧 k - 网是 k - 系, 所以 $\mathbf{P}$ 是 X 的 $m k$ - 系, 故 X 具有 σ - 局部有限 $m k$ - 系

利用定理 4, [7, 定理 3] 和 [5, 引理 6] 类似可证

推论 6 对于 $k^\perp$ 空间 X , 下列条件相互等价:

- (1) X 具有局部可数紧 k - 网
- (2) X 具有 σ - 局部有限紧 k - 网
- (3) X 具有 σ - 局部可数紧 k - 网
- (4) X 具有星可数紧 k - 网
- (5) X 具有点可数紧 k - 网

注 7 文 [4] 和文 [8] 已证明, 在 k - 空间类中, (1), (2), (3) 和 (4) 相互等价, [9, 例 2] 说明, 在 k - 空间类中, 点可数紧 k - 网 $\not\Rightarrow$ 星可数紧 k - 网, 因此, 推论 6 中的条件“ $k^\perp$ 空间”不能减弱为“ k - 空间”.

推论 8 双商 ss - 映射保持局部紧度量空间

证明 设 f 是从局部紧度量空间 X 到空间 Y 上的双商 ss - 映射, 由于双商映射保持局部紧性, 则 Y 是局部紧空间, 又由于双商映射是伪开映射, 则由定理 4 知 Y 是某一局部紧度量空间的闭 s - 映象 即存在局部紧度量空间 M 及从 M 到 Y 上的闭 s - 映射 g , 显然 g 是紧复盖映射, 而映满局部紧空间的紧复盖映射是双商映射, 则 g 是双商映射 因此 Y 是局部紧度量空间 M 的双商 s - 映象 由 [10, 推论 2], Y 是局部紧度量空间, 故双商 ss - 映射保持局部紧度量空间

定理 9 下列条件相互等价:

- (1) X 是某一局部紧度量空间的闭映象
- (2) X 是具有 σ - 遗传闭包保持 $m k$ - 系的 $k^\perp$ 空间
- (3) X 是具有遗传闭包保持 $m k$ - 系的空间
- (4) X 是具有 σ - 遗传闭包保持紧 k - 网的 $k^\perp$ 空间

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 设 X 是局部紧度量空间 M 在闭映射 f 下的象空间 由于 M 是局部紧度量空间, 则存在由 M 的紧度量量子空间组成的局部有限闭复盖 $\mathbf{F}$, 仿定理 2 中 (1) $\Rightarrow$ (2) 可证, $\mathbf{P} = \{f(F): F \in \mathbf{F}\}$ 是 X 的 $m k$ - 系 于是 X 有 σ - 遗传闭包保持 $m k$ - 系 $\mathbf{P}$. 因为伪开映射保持 $k^\perp$ 空间, 所以 X 是 $k^\perp$ 空间

(2) $\Rightarrow$ (3) 设 X 是具有 σ - 遗传闭包保持 $m k$ - 系的 $k^\perp$ 空间 让 $\mathbf{P} = \{\mathbf{P}_n: n \in \mathbf{N}\}$ 是 X 的 σ - 遗传闭包保持 $m k$ - 系 因为有限个遗传闭包保持族之并仍是遗传闭包保持集族, 并且有限个度量量子空间之并仍是度量量子空间, 不妨设 $\mathbf{P}_n \subset \mathbf{P}_{n+1} (n \in \mathbf{N})$, 令 $P_n = \mathbf{P}_n$, 那么 $\{P_n: n \in \mathbf{N}\}$ 是 X 的上升闭子集列且复盖 X . 再令 $\mathbf{F}_1 = \mathbf{P}_1, \mathbf{F}_n = \{\text{CL}(P \setminus \mathbf{P}_{n-1}): P \in \mathbf{P}_n\} (n > 1)$. 仿 [6, 定理 2] 中 (1) $\Rightarrow$ (2) 可证, $\{\mathbf{F}_n: n \in \mathbf{N}\}$ 是 X 的遗传闭包保持 $m k$ - 系

(2) $\Leftrightarrow$ (4) 利用 [9, 定理 3]

(3) $\Rightarrow$ (1) 设 X 具有遗传闭包保持 $m k$ - 系 让 $\mathbf{F}$ 是 X 的一个遗传闭包保持 $m k$ - 系, 令 $M = \bigoplus \{F: F \in \mathbf{F}\}$, 那么 M 是局部紧度量空间 让 f 是从 M 到 X 上的自然映射, 由于 $\mathbf{F}$ 是 X 的遗传闭包保持闭复盖, 则 f 是闭映射, 故 X 是局部紧度量空间 M 在闭映射 f 下的象

参 考 文 献

- [1] A. V. Arhangel'skii, *Mappings and spaces*, Russian Math. Survey, 21(1966), 115- 162
- [2] A. V. Arhangel'skii, *On quotient mapping on metric spaces*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 155 (1964), 247- 250 (Russian).
- [3] E. Michael, *A quintuple quotient quest*, Gen. Top. Appl., 2(1972), 91- 138
- [4] Y. Tanaka, *Point-countable K -systems and products of K -spaces*, Pacific J. Math., 141(1982), 199- 208
- [5] Y. Tanaka, *Closed maps of metric spaces*, Top. Appl., 11(1982), 87- 92
- [6] 林寿, 仿局部紧空间的映象, 数学杂志, 12(1992), 281- 286
- [7] 林寿, 关于 R -商、 ss -映射, 数学学报, 34(1991), 7—11
- [8] Lin Shou, *Note on K_R -spaces*, Q and A in General Topology, 9(1991), 227- 236
- [9] 林寿, 李进金, K -网与 K -系, 漳州师范学院学报, 7(1993), 8—14
- [10] Li Zhaowen and Li Jinjing, *On Michael-Nagami's problem*, Q and A in General Topology, 12 (1994), 85- 91

On the Images of Locally Compact Metric Spaces

Li Zhaowen

(Changsha University of Electric Power)

Li Jinjing

(Zhangzhou Normal University)

Abstract

In this paper, we establish the relationships between locally compact metric spaces and all kinds of spaces with mk -system by means of quotient mappings, pseudo-open mappings and closed mappings

Keywords mk -systems, quotient mappings, pseudo-open mappings, closed mappings