第18卷第1期　　数学研究与评论　　Vol. 18 No. 1
1998年2月　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　Feb. 1998

# α型β级Bazilevič函数的Fekete-Szegö问题*

杨定恭
(苏州大学数学系, 江苏215006)

**摘　要**　设 $B(\alpha,\beta)$ $(\alpha>0,\ 0\le\beta<1)$ 表示在单位圆盘内定义的规范化的α型β级Bazilevič函数类. 本文对 $B(\alpha,\beta)$ 中函数 $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ 得到 $|a_3-\lambda a_2^2|$ $(0\le\lambda\le1)$ 的准确估计.

**关键词**　单叶函数, Bazilevič函数, 近于凸函数
**分类号**　AMS(1991) 30C45/CCL O174.51

## 1　引言与结果

设 $S$ 表示在单位圆盘 $E=\{z:|z|<1\}$ 内定义的单叶解析函数

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n \tag{1}$$

的类. [1]证明了熟知的结果

$$\max_{f\in S}|a_3-\lambda a_2^2|=1+2\exp\left(-\frac{2\lambda}{1-\lambda}\right)\quad(0\le\lambda<1).$$

设 $S^*$ 与 $K$ 分别表示 $S$ 中星象函数与近于凸函数所组成的子类. [2]证得

$$\max_{f\in K}|a_3-\lambda a_2^2|=\begin{cases}3-4\lambda, & 0\le\lambda\le\frac{1}{3},\\ \frac{1}{3}+\frac{4}{9\lambda}, & \frac{1}{3}\le\lambda\le\frac{2}{3},\\ 1, & \frac{2}{3}\le\lambda\le1.\end{cases}$$

文[3]讨论 $\beta\in(0,1]$ 型近于凸函数类的Fekete-Szegö问题, 给出了准确的结果.

设 $\alpha>0,\ 0\le\beta<1$, 称 $E$ 内形为(1)的解析函数 $f(z)$ 是α型β级Bazilevič函数, 如果存在 $g(z)\in S^*$ 使得

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)^{\alpha}\right\}>\beta\quad(z\in E). \tag{2}$$

α型β级Bazilevič函数的全体记作 $B(\alpha,\beta)$. 已知 $B(\alpha,\beta)\subset B(\alpha,0)$ 是 $S$ 的重要子类; 类 $B(1,0)$ 由近于凸函数所组成. 本文研究类 $B(\alpha,\beta)$ 的Fekete-Szegö问题, 建立下述

---

* 1995年6月8日收到

**定理** 设 $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in B(\alpha,\beta)\ (\alpha>0, 0\le\beta<1)$, **则有准确的估计**

$$
|a_3-\lambda a_2^2|\le\begin{cases}\dfrac{(2\alpha+1)(\alpha+2(1-\beta))}{\alpha+2}-2(\alpha-1+2\lambda)\left(1-\dfrac{\beta}{\alpha+1}\right)^2, & 0\le\lambda\le\lambda_0, \quad (3)\\[2mm] 1-\dfrac{2\beta}{\alpha+2}+\dfrac{2\alpha^2(\alpha+3-2\lambda(\alpha+2))}{(\alpha+2)^2(\alpha-1+2\lambda)}, & \lambda_0\le\lambda\le\dfrac{\alpha+3}{2(\alpha+2)}, \quad (4)\\[2mm] 1-\dfrac{2\beta}{\alpha+2}, & \dfrac{\alpha+3}{2(\alpha+2)}\le\lambda\le1, \quad (5)\end{cases}
$$

**这里**

$$\lambda_0=\frac{\alpha(\alpha+3)-(1-\beta)(\alpha-1)(\alpha+2)}{2(\alpha+2)(\alpha+1-\beta)}. *$$

**在本定理中取** $\alpha=1$, **立得关于** $\beta\in[0,1)$ **级近于凸函数类的相应结果(特别当** $\alpha=1$ **和** $\beta=0$, **又得关于近于凸函数类的结果).**

## 2　定理的证明

**设** $P$ **表示** $E$ **内满足条件** $\mathrm{Re}\,p(z)>0$ **的解析函数** $p(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n$ **组成的类;** $\Omega$ **表示** $E$ **内满足** $|w(z)|<1$ **的解析函数** $w(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_nz^n$ **构成的类.**

**引理 1**[4]　**设** $p(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n\in P$, **则**

$$\left|p_2-\frac{1}{2}p_1^2\right|\le2-\frac{1}{2}|p_1|^2.$$

**引理 2**[5]　**设** $w(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_nz^n\in\Omega$, **则**

$$|\alpha_1|\le1\ \text{且}\ |\alpha_2|\le1-|\alpha_1|^2.$$

**现在证明定理. 设** $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in B(\alpha,\beta)$, (2) **可写成**

$$f'(z)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\alpha-1}(1-w(z))=\left(\frac{g(z)}{z}\right)^{\alpha}(1+(1-2\beta)w(z)), \quad (6)$$

**这里**

$$g(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}b_nz^n\in S^*, w(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_nz^n\in\Omega$$

**将** $f(z)$, $g(z)$ **与** $w(z)$ **的幂级数展式代入**(6), **比较** $z$ **与** $z^2$ **的系数得**

$$(\alpha+1)a_2=\alpha b_2+2\alpha_1(1-\beta),$$

$$(\alpha+2)a_3+\frac{1}{2}(\alpha-1)(\alpha+2)a_2^2-\alpha_1a_2(\alpha+1)-\alpha_2$$

$$=\alpha b_3+\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)b_2^2+\alpha\alpha_1b_2(1-2\beta)+\alpha_2(1-2\beta).$$

---

* 易知 $0<\lambda_0<\dfrac{\alpha+3}{2(\alpha+2)}$

从而

$$(\alpha+2)(a_3-\lambda a_2^2)=-(\alpha+2)\left(\frac{\alpha-1}{2}+\lambda\right)\left(\frac{\alpha b_2+2\alpha_1(1-\beta)}{\alpha+1}\right)^2+\alpha b_3$$
$$+\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)b_2^2+2(1-\beta)(\alpha\alpha_1 b_2+\alpha_1^2+\alpha_2). \tag{7}$$

由于 $g(z)\in S^*$, 有 $zg'(z)=g(z)p(z)$, 这里 $p(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}p_n z^n\in P$. 比较展式系数得

$$b_2=p_1,\quad b_3=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2). \tag{8}$$

在(7)中代入(8), 经整理产生

$$(\alpha+2)(a_3-\lambda a_2^2)=\frac{\alpha}{2}\left(p_2-\frac{1}{2}p_1^2\right)+\frac{\alpha}{4}p_1^2\left[1+\frac{2\alpha(\alpha+3-2\lambda(\alpha+2))}{(\alpha+1)^2}\right]$$
$$+2\alpha_2(1-\beta)+2\alpha_1^2(1-\beta)\left[\beta+(1-\beta)\frac{\alpha+3-2\lambda(\alpha+2)}{(\alpha+1)^2}\right]$$
$$+2\alpha\alpha_1 p_1(1-\beta)\frac{\alpha+3-2\lambda(\alpha+2)}{(\alpha+1)^2}. \tag{9}$$

设 $\lambda\le\frac{\alpha+3}{2(\alpha+2)}$. 根据引理1和引理2以及 $|p_1|\le 2$, 从(9)推出

$$(\alpha+2)|a_3-\lambda a_2^2|$$
$$\le\frac{\alpha}{2}\left(2-\frac{1}{2}|p_1|^2\right)+\frac{\alpha}{4}|p_1|^2\left[1+\frac{2\alpha(\alpha+3-2\lambda(\alpha+2))}{(\alpha+1)^2}\right]$$
$$+2(1-\beta)(1-|\alpha_1|^2)+2|\alpha_1|^2(1-\beta)\left[\beta+(1-\beta)\frac{\alpha+3-2\lambda(\alpha+2)}{(\alpha+1)^2}\right]$$
$$+2\alpha|\alpha_1||p_1|(1-\beta)\frac{\alpha+3-2\lambda(\alpha+2)}{(\alpha+1)^2}$$
$$\le\alpha+\frac{2\alpha^2(\alpha+3-2\lambda(\alpha+2))}{(\alpha+1)^2}+2(1-\beta)+\frac{4\alpha(1-\beta)(\alpha+3-2\lambda(\alpha+2))}{(\alpha+1)^2}|\alpha_1|$$
$$-2(1-\beta)^2\left(1-\frac{\alpha+3-2\lambda(\alpha+2)}{(\alpha+1)^2}\right)|\alpha_1|^2\equiv M(x),\ x=|\alpha_1|\in[0,1]. \tag{10}$$

首先证明不等式(3). 设 $0\le\lambda\le\lambda_0$. 由于 $\lambda_0<\frac{\alpha+3}{2(\alpha+2)}$,

$$M'(x)=\frac{4(1-\beta)}{(\alpha+1)^2}[\alpha(\alpha+3-2\lambda(\alpha+2))-(1-\beta)(\alpha+2)(\alpha-1+2\lambda)x]$$

是线性函数, $M'(0)>0$ 和

$$M'(1)=\frac{8(1-\beta)(\alpha+2)(\alpha+1-\beta)}{(\alpha+1)^2}(\lambda_0-\lambda)\ge 0,$$

所以 $M(x)$ 在 $[0,1]$ 上非减. 注意

$$M(1)=\alpha+2(1-\beta)-2(1-\beta)^2+2(\alpha+3-2\lambda(\alpha+2))\left(1-\frac{\beta}{\alpha+1}\right)^2$$
$$=(2\alpha+1)(\alpha+2(1-\beta))-2(\alpha+2)(\alpha-1+2\lambda)\left(1-\frac{\beta}{\alpha+1}\right)^2,$$

于是从(10)立得不等式(3).

估计(3)是准确的,

$$f(z)=\left\{\alpha\int\frac{t^{\alpha-1}(1+(1-2\beta)t)}{(1-t)^{2\alpha+1}}dt\right\}^{1/\alpha} \tag{11}$$

为极值函数 事实上, 取 $g(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}, w(z)=z$, 则(11)给出的 $f(z)$ 满足(6). 注意 $b_2=2$, $b_3=3$, $\alpha_1=1$和 $\alpha_2=0$, 从(7)知(3)成等式

其次证明不等式(4).

设 $\lambda_0\le\lambda\le\dfrac{\alpha+3}{2(\alpha+2)}$. 在此条件下

$$\alpha-1+2\lambda\ge\alpha-1+2\lambda_0=\frac{\alpha(\alpha+1)^2}{(\alpha+2)(\alpha+1-\beta)}>0, M''(x)<0\,(0\le x\le1), M'(x_0)=0,$$

这里

$$0\le x_0=\frac{\alpha(\alpha+3-2\lambda(\alpha+2))}{(1-\beta)(\alpha+2)(\alpha-1+2\lambda)}\le1.$$

因此 $M(x)$ 在 $x_0$ 达到最大值, 且

$$M(x_0)=\alpha+2(1-\beta)+\frac{2\alpha^2(\alpha+3-2\lambda(\alpha+2))}{(\alpha+1)^2}+\frac{4\alpha(1-\beta)(\alpha+3-2\lambda(\alpha+2))}{(\alpha+1)^2}x_0$$
$$-\frac{2(1-\beta)^2(\alpha+2)(\alpha-1+2\lambda)}{(\alpha+1)^2}x_0^2=\alpha+2(1-\beta)+\frac{2\alpha^2(\alpha+3-2\lambda(\alpha+2))}{(\alpha+2)(\alpha-1+2\lambda)}.$$

不等式(4)由此得证

若取

$$g(z)=\frac{z}{(1-z)^2}, w(z)=\frac{z(z+x_0)}{1+x_0z}=x_0z+(1-x_0^2)z^2+\cdots,$$

则函数

$$f(z)=\{\alpha\int\frac{t^{\alpha-1}}{(1-t)^{2\alpha}}\frac{1+(1-2\beta)w(t)}{1-w(t)}dt\}^{1/\alpha}$$

满足(6), 且有 $(\alpha+2)(a_3-\lambda a_2^2)=M(x_0)$. 因此估计(4)是最佳可能的

以下证明不等式(5).

设 θ是实数,

$$G(z)=e^{-i\theta}g(e^{i\theta}z), F(z)=e^{-i\theta}f(e^{i\theta}z)=z+e^{i\theta}a_2z^2+e^{2i\theta}a_3z^3+\cdots.$$

易知 $G(z)\in S^*$, 而且利用(2)有

$$\mathrm{Re}\{\frac{zF'(z)}{F(z)}(\frac{F(z)}{G(z)})^{\alpha}\}>\beta\ (z\in E).$$

所以函数 $f$ 的旋转仍在 $B(\alpha,\beta)$ 中, 这表明 $\max\limits_{f\in B(\alpha,\beta)}|a_3-\lambda a_2^2|=\max\limits_{f\in B(\alpha,\beta)}\mathrm{Re}(a_3-\lambda a_2^2)$. 这样只要求出 $\mathrm{Re}(a_3-\lambda a_2^2)$ 的最大值就够了.

置 $p_1=2re^{i\theta}(0\le r<1)$ 和 $\alpha_1=\rho e^{i\varphi}(0\le\rho<1)$. 应用引理1和引理2, 在(9)的两端取实部导致

$$\begin{aligned}&(\alpha+2)\mathrm{Re}(a_3-\lambda a_2^2)\\ &\le\alpha(1-r^2)+\alpha r^2\cos2\theta[1+\frac{2\alpha(\alpha+3-2\lambda(\alpha+2))}{(\alpha+1)^2}]\\ &\quad+2(1-\beta)(1-\rho^2)+2(1-\beta)\rho^2\cos2\varphi[\beta+(1-\beta)\frac{\alpha+3-2\lambda(\alpha+2)}{(\alpha+1)^2}]\\ &\quad+4\alpha(1-\beta)r\rho\cos(\theta+\varphi)\frac{\alpha+3-2\lambda(\alpha+2)}{(\alpha+1)^2}\\ &\equiv\alpha+2(1-\beta)+H(\lambda,\beta).\end{aligned}\tag{12}$$

当 $\lambda=1$,

$$H(1,\beta)=-\alpha r^2+\frac{\alpha(1-\alpha)}{\alpha+1}r^2\cos 2\theta-2(1-\beta)\rho^2+2(1-\beta)\left(\beta-\frac{1-\beta}{\alpha+1}\right)\rho^2\cos 2\varphi$$
$$-\frac{4\alpha(1-\beta)}{\alpha+1}r\rho\cos(\theta+\varphi)$$
$$=-\alpha r^2\left(1+\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\cos 2\theta\right)-2(1-\beta)\left[1-\left(\beta-\frac{1-\beta}{\alpha+1}\right)\cos 2\varphi\right]$$
$$\cdot\left[\rho+\frac{\frac{\alpha}{\alpha+1}r\cos(\theta+\varphi)}{1-\left(\beta-\frac{1-\beta}{\alpha+1}\right)\cos 2\varphi}\right]^2+2(1-\beta)\frac{\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}r\cos(\theta+\varphi)\right)^2}{1-\left(\beta-\frac{1-\beta}{\alpha+1}\right)\cos 2\varphi}.$$

注意$\left|\beta-\frac{1-\beta}{\alpha+1}\right|<1$，上式右端第二项$\le 0$，有

$$H(1,\beta)\le-\frac{\alpha r^2 L(\beta)}{(\alpha+1)^2\left[1-\left(\beta-\frac{1-\beta}{\alpha+1}\right)\cos 2\varphi\right]},$$

这里

$$L(\beta)=[\alpha+1+(\alpha-1)\cos 2\theta][\alpha+1-(\beta(\alpha+1)-(1-\beta))\cos 2\varphi]$$
$$-\alpha(1-\beta)[1+\cos 2(\theta+\varphi)].$$

由于$L(\beta)$是线性函数，

$$L(0)=[\alpha+1+(\alpha-1)\cos 2\theta](\alpha+1+\cos 2\varphi)-\alpha[1+\cos 2(\theta+\varphi)]$$
$$=\alpha^2(1+\cos 2\theta)+\alpha(1+\cos 2\varphi+\sin 2\theta\sin 2\varphi)+(1-\cos 2\theta)(1+\cos 2\varphi)$$
$$\ge 2\alpha^2\cos^2\theta+\alpha\sin 2\theta\sin 2\varphi+4\sin^2\theta\cos^2\varphi$$
$$\ge 2(\alpha\cos\theta\sin\varphi+\sin\theta\cos\varphi)^2\ge 0$$

和

$$L(1)=(\alpha+1)[\alpha(1+\cos 2\theta)+1-\cos 2\theta](1-\cos 2\varphi)\ge 0,$$

故当$0\le\beta<1$时$L(\beta)\ge 0$，从而$H(1,\beta)\le 0$。这样(12)产生$\mathrm{Re}(a_3-a_2^2)\le 1-\frac{2\beta}{\alpha+2}$，因此不等式(5)当$\lambda=1$成立。

现在设$\frac{\alpha+3}{2(\alpha+2)}\le\lambda\le 1$。因为

$$a_3-\lambda a_2^2=\frac{2(\alpha+2)(1-\lambda)}{\alpha+1}\left(a_3-\frac{\alpha+3}{2(\alpha+2)}a_2^2\right)+\frac{2\lambda(\alpha+2)-(\alpha+3)}{\alpha+1}(a_3-a_2^2),$$

有

$$|a_3-\lambda a_2^2|\le\frac{2(\alpha+2)(1-\lambda)}{\alpha+1}\left(1-\frac{2\beta}{\alpha+2}\right)+\frac{2\lambda(\alpha+2)-(\alpha+3)}{\alpha+1}\left(1-\frac{2\beta}{\alpha+2}\right)=1-\frac{2\beta}{\alpha+2},$$

其中用到(4)当$\lambda=\frac{\alpha+3}{2(\alpha+2)}$成立和(5)当$\lambda=1$成立。

估计(5)不能再改进。因为取$g(z)=\frac{z}{1-z^2}$，$w(z)=z^2$，则

$$f(z)=\left\{\alpha\int\frac{t^{\alpha-1}(1+(1-2\beta)t^2)}{(1-t^2)^{\alpha+1}}dt\right\}^{1/\alpha}$$

满足(6)，且$a_2=0$，$a_3=1-\frac{2\beta}{\alpha+2}$。定理证毕。

## 参　考　文　献

[1] M. Fekete and G. Szegö, *Eine Bemerkung über ungerade schlichte funktionen*, J. London Math. Soc., 8(1933), 85-89.

[2] W. Koepf, *On the Fekete-Szegö problem for close-to-convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 101(1987), 89-95.

[3] 高纯一, 近于凸函数族的 Fekete-Szegö 问题, 数学年刊, 15A (1994), 650-656.

[4] Ch. Pommerenke, *Univalent functions*, Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen, 1975.

[5] Z. Nehari, *Conformal mapping*, McGraw-Hill, New York, 1952.

# On the Fekete-Szegö Problem for Bazilevič Functions of Type α and Order β

*Yang Dinggong*

(Dept. of Math., Suzhou University, Suzhou 215006)

**Abstract**

Let $B(\alpha, \beta)$ ($\alpha > 0$, $0 \leq \beta < 1$) denote the class of normalized Bazilevič functions of type $\alpha$ and order $\beta$ defined in the unit disc, and let $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in B(\alpha, \beta)$. Sharp bounds are obtained for $|a_3 - \lambda a_2^2|$ when $\lambda \in [0, 1]$.

**Keywords** univalent, Bazilevič, close-to-convex, functions