图的强收缩核与图的强自同态幺半群的正则性*

樊锁海
(暨南大学数学系, 广州510632)

摘　要　本文研究图及其强自同态幺半群. 首先刻画了图的强自同态幺半群的正则元, 然后给出了此幺半群正则的充要条件. 这推广了[1]和[2]中关于有限图的强自同态幺半群正则的结果.

关键词　图, 强自同态, 幺半群, 强收缩核, 正则
分类号　AMS(1991) 20M20, 05C25/CCL O157.5

1　引　言

图及其自同态幺半群近年来已成为图论和半群代数理论交叉领域十分活跃的研究课题. 它研究图的组合结构和图的自同态幺半群的代数结构以及它们之间的本质联系, 既丰富了组合数学的内容, 又为半群代数理论在图论中的应用开辟了广泛的前景. 八十年代后期, 德国学者U. Knauer 讨论了图的各种自同态[1, 3, 4]; 作者也刻画了自同态幺半群正则的二分图的结构[5], 确定了 E-S 不可收缩图[6], 讨论了图的字典序积的自同态幺半群[7]. 本文则讨论图的强自同态幺半群的正则性.

下面给出一些本文常用的概念和术语, 有关其它图论和半群理论的概念, 请参考[8]和[9].

图 $X=(V(X), E(X))$ 是一有序对, 其中 $V(X)$ 称为 X 的顶点集, $E(X)\subseteq V(X)\times V(X)$ 是 $V(X)$ 上的一个二元关系, 称为 X 的边集. 关于 $x_1, x_2\in V(X)$, 如果 $(x_1, x_2)\in E(X)$, 那么称 (x_1, x_2) 是一条有向边. 关于两个图 $X=(U(X), E(X))$ 和 $Y=(V(Y), E(Y))$, 映射 f: $V(X)\to V(Y)$ 称为图 X 到 Y 的同态, 如果关于任意两个顶点 x_1, x_2, $(x_1, x_2)\in E(X)$ 蕴涵 $(f(x_1), f(x_2))\in E(Y)$; 同态 f 称为强同态, 如果 $(f(x_1), f(x_2))\in E(Y)$ 蕴涵 $(x_1, x_2)\in E(X)$; 同态 f 称为同构, 如果存在图 Y 到 X 的同态 g, 满足 $fg=\mathrm{id}_{V(Y)}$ 和 $gf=\mathrm{id}_{V(X)}$, 这里 $\mathrm{id}_{V(X)}$ 表示集合 $V(X)$ 上的恒等映射. 图 X 到它自身的同态称为 X 的自同态, X 的自同态的集合在映射合成下构成一个幺半群, 记为 $\mathrm{End}X$, 称为图 X 的自同态幺半群. 类似地有图 X 的强自同态幺半群 $S\mathrm{End}X$ 和自同构群 $\mathrm{Aut}X$. 显然, $\mathrm{Aut}X\subseteq S\mathrm{End}X\subseteq \mathrm{End}X$.

设 X 是一个图, 它的强自同态幺半群为 $S\mathrm{End}X$. 设 $f\in S\mathrm{End}X$, 记 $\mathrm{ran}(f)$ 是同态 f 在集 $V(X)$ 上的值域, $R(f)$ 是由顶点子集 $\mathrm{ran}(f)$ 导出的 X 的子图, 称为图 X 在强自同态 f 下的强

* 1995年1月3日收到. 1997年10月7日收到修改稿. 国务院侨办重点学科科研基金资助课题.

自同态像图 称 f 是图 X 的强收缩映射，如果 f 是幺半群 $S\mathrm{End}X$ 的幂等元，即 $f = ff$；称 X 的导出子图 A 是 X 的强收缩核，如果存在强收缩映射 f 使得 $A = R(f)$.

设 S 是一个幺半群，称 $a \in S$ 是 S 的正则元 如果存在 $b \in S$，使得 $aba = a$. 称幺半群 S 是正则幺半群，如果 S 的所有元素都是正则元

2 强自同态幺半群的正则性

定理 2 1 设 $S\mathrm{End}X$ 是图 X 的强自同态幺半群，$f \in S\mathrm{End}X$. 则 f 是正则元当且仅当 $R(f)$ 是图 X 的强收缩核，而且存在 X 的强收缩核 A 使得 f 在 $V(A)$ 上的限制 $f|_{V(A)}$ 是图 A 到 $R(f)$ 上的同构

证明 假设 f 是 $S\mathrm{End}X$ 的正则元，则存在 $g \in S\mathrm{End}X$ 使得 $fgf = f$. 有 $\mathrm{ran}(fg) \subseteq \mathrm{ran}(f)$，且 $\mathrm{ran}(f) = \mathrm{ran}(fgf) \subseteq \mathrm{ran}(fg)$，从而 $\mathrm{ran}(fg) = \mathrm{ran}(f)$. 而 $fg = (fgf)g = (fg)(fg)$，所以 $R(f) = R(fg)$ 是图 X 的强收缩核 令 $A = R(gf)$，显然 A 也是 X 的强收缩核，注意到 $f|_{V(A)}$ 是图 A 到 $R(f)$ 上的同态，$g|_{V(R(f))}$ 是图 $R(f)$ 到 A 的同态，且 $f|_{V(A)} \cdot g|_{V(R(f))} = \mathrm{id}_{V(R(f))}$，$g|_{V(R(f))} f|_{V(A)} = \mathrm{id}_{V(A)}$，所以由定义知 $f|_{V(A)}$ 是图 A 到 $R(f)$ 上的同构

反之，假设 $R(f)$ 是强收缩核，而且存在强收缩核 A 使得 $f|_{V(A)}$ 同构地映射 A 到 $R(f)$ 上 于是有强收缩映射 $e \in S\mathrm{End}X$ 使得 $R(f) = R(e)$. 设 t 是 $R(f)$ 到 A 上的同构，显然 $t(f|_{V(A)}) = \mathrm{id}_{V(A)}$，$(f|_{V(A)})t = \mathrm{id}_{V(R(f))}$. 令 $g = te$，则 $g \in S\mathrm{End}X$. 事实上，关于 $x_1, x_2 \in V(X)$，若有 $(tex_1, tex_2) \in E(X)$，则有 $(tex_1, tex_2) \in E(A)$. 而 $f|_{V(A)}$ 是 A 到 $R(f)$ 上的同构，所以 $(f|_{V(A)}tex_1, f|_{V(A)}tex_2) \in E(R(f))$. 但 $f|_{V(A)}t = \mathrm{id}_{V(R(f))}$，从而有 $(ex_1, ex_2) \in E(R(f)) \subseteq E(X)$. 再由 $e \in S\mathrm{End}X$ 得 $(x_1, x_2) \in E(X)$. 显然 $g = te \in \mathrm{End}X$，所以 $g = te \in S\mathrm{End}X$. 由于 $e = ee$ 且 $R(f) = R(e)$，有 $ef = f$，因而 $fgf = f(te)f = ft(ef) = ftf = (f|_{V(A)}t)f = (\mathrm{id}_{V(R(f))})f = f$. 最后得 f 是 $S\mathrm{End}X$ 的正则元

设 M 是一个幺半群，A 是 M 的子集，称 A 在 M 中是左酉的，如果关于任意 $a \in A$，$m \in M$，$am \in M$ 蕴涵 $m \in A$，记 $T(V(X))$ 为集合 $V(X)$ 上的全变换幺半群

命题 2 2 幺半群 $S\mathrm{End}X$ 在幺半群 $T(V(X))$ 中左酉

证明 将证明关于任意 $s \in S\mathrm{End}X$，$t \in T(V(X))$，由 $st \in S\mathrm{End}X$ 可得 $t \in S\mathrm{End}X$. 关于 $x_1, x_2 \in V(X)$，$(x_1, x_2) \in E(X)$ 当且仅当 $(stx_1, stx_2) \in E(X)$，后者又等价于 $(tx_1, tx_2) \in E(X)$. 从而又有 $t \in S\mathrm{End}X$.

命题 2 3 设 $f \in S\mathrm{End}X$，则存在 X 的强收缩核 A 使得 $f|_{V(A)}$ 是图 A 到 $R(f)$ 上的同构映射

证明 设 $f \in S\mathrm{End}X \subseteq T(V(X))$，则由于 $T(V(X))$ 是正则幺半群，所以存在 $g \in T(V(X))$ 使得 $fgf = f$. 由命题 2 2 知幺半群 $S\mathrm{End}X$ 在 $T(V(X))$ 中左酉，从而由 $f(gf) = fgf = f \in S\mathrm{End}X$ 可得 $gf \in S\mathrm{End}X$. 令 $A = R(gf)$，则 A 是 X 的强收缩核，而且 $f|_{V(A)}$ 是图 A 到 $R(f)$ 上的同构 事实上，$f|_{V(A)}$ 是 $V(A) = V(R(gf))$ 到 $V(R(f))$ 上的双射：由 $f(x_1) = f(x_2)$ 可得 $gf(x_1) = gf(x_2)$，所以 $gf(x_1) \neq gf(x_2)$ 必有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，即 $f|_{V(A)}gf(x_1) \neq f|_{V(A)}gf(x_2)$，则 $f|_{V(A)}$ 是单射；关于 $V(R(f))$ 中任意元素 $f(x)$，存在 $gf(x) \in V(R(gf)) = V(A)$，使得 $f|_{V(A)}gf(x) = fgf(x) = f(x)$，即 $f|_{V(A)}$ 是满射 同时 $f|_{V(A)}$ 是 A 到 $R(f)$ 上

的强同态,所以 $f|_{V(A)}$ 是 A 到 $R(f)$ 上的同构

由定理2 1和命题2 3可得: $f\in S\,\mathrm{End}X$ 是正则元当且仅当 $R(f)$ 是 X 的强收缩核 于是有

定理2 4 设 X 是一个图,则强自同态幺半群 $S\,\mathrm{End}X$ 正则当且仅当 X 的任意强自同态像图都是 X 的强收缩核

命题2 5 设 $f\in S\,\mathrm{End}X$,若存在正整数 m 使得 $f^mf^m=f^m$,则 $R(f)$ 是 X 的强收缩核

证明 设 $f\in S\,\mathrm{End}X$,且存在 m 使得 $f^mf^m=f^m$,令 $V(X)$ 上的映射 e 如下: $e(x)=x$,如果 $x\in\mathrm{ran}(f)$; $e(x)=f^m(x)$,如果 $x\notin\mathrm{ran}(f)$. 显然 $\mathrm{ran}(f)=\mathrm{ran}(e)$. 下面证明 $e\in S\,\mathrm{End}X$,即关于任意两个顶点 x_1 和 x_2, $(e(x_1),e(x_2))\in E(X)$ 当且仅当 $(x_1,x_2)\in E(X)$. 分四种情形讨论

(1) 若 $x_1,x_2\in\mathrm{ran}(f)$,则 $e(x_1)=x_1$, $e(x_2)=x_2$. 结论显然成立

(2) 若 $x_1\notin\mathrm{ran}(f)$, $x_2\notin\mathrm{ran}(f)$,则 $e(x_1)=f^m(x_1)$, $e(x_2)=f^m(x_2)$. 因为 $f\in S\,\mathrm{End}X$,所以 $(f(x_1),f(x_2))\in E(X)$,当且仅当 $(x_1,x_2)\in E(X)$,前者又等价于 $(f^2(x_1),f^2(x_2))\in E(X)$. 依次继续,可得 $(x_1,x_2)\in E(X)$ 与 $(f^m(x_1),f^m(x_2))\in E(X)$ 等价,即 $(x_1,x_2)\in E(X)$ 当且仅当 $(e(x_1),e(x_2))\in E(X)$.

(3) 若 $x_1\in\mathrm{ran}(f)$, $x_2\notin\mathrm{ran}(f)$,则 $e(x_1)=x_1$, $e(x_2)=f^m(x_2)$,因为 $(x_1,x_2)\in E(X)$ 等价于 $(f^{2m}(x_1),f^{2m}(x_2))\in E(X)$,即 $(f^m(x_1),f^mf^m(x_2))\in E(X)$,后者又等价于 $(x_1,f^m(x_2))\in E(X)$,此即 $(e(x_1),e(x_2))\in E(X)$.

(4) 若 $x_1\notin\mathrm{ran}(f)$, $x_2\in\mathrm{ran}(f)$. 同情形(3)可证

所以在任何情形下,均有 $(x_1,x_2)\in E(X)$ 当且仅当 $(e(x_1),e(x_2))\in E(X)$,即 $e\in S\,\mathrm{End}X$. 而由 e 的定义易知 $ee(x)=e(x)$,即 $ee=e$. 所以 $R(f)=R(e)$ 是图 X 的强收缩核

注记 若命题2 5中条件不满足,则结论亦不真 例如图 $X=(V,E)$,其中 $V=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$, $E=\{(1,2),(2,3),\cdots,(n,n+1),\cdots\}$. 令 $f(n)=n+1$, $n\in V$,则 $f\in S\,\mathrm{End}X$. 而且 $f^m(n)=n+m$ 关于任意正整数 m,所以 $f^mf^m\neq f^m$. 这时强自同态像图 $R(f)=(V\setminus\{1\},E\setminus\{(1,2)\})$ 也不是 X 的强收缩核 否则,存在强收缩映射 e 使得 $R(e)=R(f)$,则 e 保持 $R(f)$ 的顶点不动,即 $e(n)=n$, $n\neq1$ 且 $e(1)\neq1$. 但由 $(1,2)\in E(X)$ 及 $e\in S\,\mathrm{End}X$ 知 $(e(1),e(2))\in E(X)$,即 $(e(1),2)\in E(X)$,这与 X 的结构矛盾

注意到一个半群 S 的元素 a 的阶数是由 a 生成的子半群的所含元素个数,称 a 是有限阶的,如果它生成的子半群所含元素是有限的 半群 S 称为周期半群,如果 S 的所有元素都是有限阶的 在一个周期半群 S 中,关于任意元素 a,都存在正整数 m 使得 $a^ma^m=a^m$. 而有限半群必是周期半群

推论2 7 设 $S\,\mathrm{End}X$ 是图 X 的强自同态幺半群,若 $S\,\mathrm{End}X$ 是周期幺半群,则 $S\,\mathrm{End}X$ 正则 特别,有限强自同态幺半群是正则幺半群

设 $X=(V(X),E(X))$ 是一个图 若 $V(X)$ 是有限集,则称 X 为有限图,这时边集 $E(X)$ 也是有限的 若 $E(X)$ 是 $V(X)$ 上的一个对称二元关系,即若有 $(x_1,x_2)\in E(X)$ 则必 $(x_2,x_1)\in E(X)$,则称 X 为无向图,这时可用无序对 $\{x_1,x_2\}$ 代替两个有序对 (x_1,x_2) 和 (x_2,x_1),把 $E(X)$ 看成 $V(X)$ 的二元子集组成的集合. 若 $\{x,x\}\in E(X)$,则称 X 含有自环 $\{x,x\}$. 称顶点集有限、不含自环的无向图为有限简单图

推论2.8 (1) 若X是无向图,则$S\mathrm{End}X$正则当且仅当X的任意一个强自同态像图都是强收缩核

(2) 若X是有限图,则$S\mathrm{End}X$是正则幺半群.

(3) 若X是有限简单图,则$S\mathrm{End}X$是正则幺半群.

考虑三个基本的无限无向图,分别是无限星图$K_{1,\infty}$,其中$V(K_{1,\infty})=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$, $E(K_{1,\infty})=\{\{0,1\},\{0,2\},\cdots,\{0,n\},\cdots\}$;单向无限路$P_\infty$,其中$V(P_\infty)=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$, $E(P_\infty)=\{\{1,2\},\{2,3\},\cdots,\{n,n+1\},\cdots\}$;双向无限路$P$,其中$V(P)=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$, $E(P)=\{\cdots,\{-n,-(n-1)\},\cdots,\{-2,-1\},\{-1,0\},\{0,1\},\cdots,\{n,n+1\},\cdots\}$.有

命题2.9 强自同态幺半群$S\mathrm{End}K_{1,\infty}$和$S\mathrm{End}P$都是正则幺半群,而$S\mathrm{End}P_\infty$不是正则幺半群.

证明 容易验证,无限星图$K_{1,\infty}$的任意强自同态像图都是它的强收缩核,而双向无限路P的任意强自同态像图是它本身当然也是强收缩核,所以根据推论2.8(1)知它们的强自同态幺半群$S\mathrm{End}K_{1,\infty}$和$S\mathrm{End}P$都正则.

关于单向无限路P_∞,令f为$V(P_\infty)$上映射,$f(n)=n+1$,关于任意$n\in V(P_\infty)$,可验证$f\in S\mathrm{End}P_\infty$.但强自同态像图$R(f)$不是$P_\infty$的强收缩核.否则有强收缩映射$e$使得$R(f)=R(e)$.则有$e(n)=n$关于$n\geq 2$, $n\in \mathrm{ran}(f)$;而$1\notin \mathrm{ran}(f)$,所以$e(1)\neq 1$.设$e(1)=k$, $k>1$,则$\{e(1),e(k+1)\}=\{k,k+1\}\in E(P_\infty)$, e是强自同态,所以$\{1,k+1\}\in E(P_\infty)$.但这与P_∞结构矛盾.因此根据推论2.8(1)和$S\mathrm{End}P_\infty$不是正则幺半群.

下面证明[1]中定理4.1可以由本文推论2.8(1)推出.

有关定义和性质均参考[1]. U. Knauer把图X分解成图X的自然强因子图$U=X|_v$与一族完全不连通图的广义字典序积,即$X=U[(Y_u)_{u\in V(U)}]$.而且当$|U|<+\infty$,即U是有限图时, $u\in p_1(\mathrm{Im}\varphi)$,关于$u\in V(U)$, $\varphi\in S\mathrm{End}X$,这里$\mathrm{Im}\varphi=\mathrm{ran}(\varphi)$.

设$\varphi\in S\mathrm{End}X$.构造$V(X)$上映射$e$,关于任意$x\in V(X)$, $x=(u,y_u)\in V(U[(Y_u)_{u\in V(U)}])$.由$u\in p_1(\mathrm{Im}\varphi)$知$\{(u,y_u)|y_u\in Y_u\}\cap \mathrm{Im}\varphi\neq\varnothing$.令$e$保持集$\{(u,y_u)|y_u\in Y_u\}$中元素不动,而将集$\{(u,y_u)|y_u\in Y_u\}$中其余元素映到集$\{(u,y_u)|y_u\in Y_u\}\cap\mathrm{Im}\varphi$中去,则$e$是图$X$的强收缩映射,而且$ran(e)=\mathrm{ran}(\varphi)$,即$R(\varphi)=R(e)$是强收缩核,于是根据结论2.8(1)可得

定理2.9[1] 设$X=U[(Y_u)_{u\in V(U)}]$是一个图且U是有限图,则$S\mathrm{End}X$是正则幺半群.

若考虑双向无限路P与一族完全不连通图的广义字典序积,可以验证此广义字典序积图的任意一个强自同态像图都是强收缩核,由推论2.8(1)知此广义字典序积的强自同态幺半群是正则幺半群,而定理2.9却不能对此图进行判断.

参 考 文 献

[1] U. Knauer and M. Nieporte, *Endomorphisms of Graphs, Ⅰ. The monoid of strong endomorphism*, Arch. Math., 52(1989), 195-201.

[2] Li Weimin, *Green's relations on the strong endomorphism monoid of a graph*, Semigroup Forum, 47

(1993), 209- 214.
[3] U. Knauer, *Endomorphisms of Graphs*, II. *Various unretractive graphs*, Arch. Math., 55(1990), 193- 203.
[4] U. Knauer, *Endomorphisms spectra of graph*, Discrete Math., 109(1992), 445- 457.
[5] Fan Suohai, *On End-regular bipartite graphs*, Graph Theory and Combinatorics, World Scientific, 1993, 117- 130.
[6] **樊锁海, 图的自同态半群**, I E-S **不可收缩的图, 兰州大学学报**, 30: 1(1994), 25—27.
[7] **樊锁海, 图的字典序积的自同态幺半群, 数学学报**, 38: 2(1995), 248- 252.
[8] J. M. Howie, *An introduction to semigroup theory*, Academic Press, New York, 1976.
[9] F. Harary, *Graph theory*, Academic Press, New York, 1967.

Strong Retracts and the Regularity of Strong Endomorphism Monoids of Graphs

Fan Suohai
(Dept. of Math., Jinan Univ., Guangzhou 510632)

Abstract

Graphs and their strong endomorphism monoids are considered in this paper. First, the regular elements of strong endomorphism monoids of graphs are characterized. Then necessary and sufficient conditions for these monoids to be regular are given. These results generalize that of U. Knauer and Li Weimin about the regularity of strong endomorphism monoids of finite graphs.

Keywords graphs, strong endomorphism, monoid, strong retract, regular.