第18卷第1期 数学研究与评论 Vol. 18 No. 1
1998年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1998

非奇H 矩阵与M-矩阵的等价条件*

李 庆 春
(吉林师范学院数学系, 吉林市132011)

摘 要 本文引进了局部对角占优矩阵的概念, 得到了非奇H 矩阵与M-矩阵的等价条件与判定准则, 改进了文[1]的主要结果

关键词 局部对角占优矩阵, 非奇H 矩阵, M-矩阵
分类号 AMS(1991) 15A57/CCL O151. 21

1 引 言

设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 记$\Lambda_i(A)=\sum_{j\neq i}|a_{ij}|$. 若$|a_{ii}|>\Lambda_i(A)$, $\forall i\in N=\{1,2,\cdots,n\}$, 则称$A$ 为严格对角占优矩阵, 记为$A\in D$; 若存在正对角阵X 使$AX\in D$, 则称A 为非奇H 矩阵, 记作$A\in D^*$. 最近, 文[1]给出了若干非奇H 矩阵的简捷判据 本文引入了局部对角占优矩阵的概念, 得到了非奇H 矩阵和M-矩阵的等价条件和判定条件. 从而改进了文[1]的主要结果

本文引入下列记号与约定:

记$N_1, N_2\subseteq N$, $N=N_1\oplus N_2$, 及$\sigma_i(A)=\dfrac{\Lambda_i(A)}{|a_{ii}|}$, $i\in N$, 且记

$$J(A)=\{i\in N\ |\ |a_{ii}|>\Lambda_i(A)\},$$

$$N_1^+(A)=\{i\in N_1\ |\ \Lambda_i(A)>\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|\sigma_t(A)\},$$

$$N_1^0(A)=\{i\in N_1\ |\ \Lambda_i(A)=\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|\sigma_t(A)\},$$

$$N_2^+(A)=\{i\in N_2\ |\ |a_{ii}|>\sum_{t\in N_2,t\neq i}|a_{it}|\},$$

$$N_2^0(A)=\{i\in N_2\ |\ |a_{ii}|=\sum_{t\in N_2,t\neq i}|a_{it}|\},$$

$$\tilde{J}(A)=\{i,j\in N\ |\ (\Lambda_i(A)-\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|\sigma_t(A))(|a_{jj}|-\sum_{t\in N_2,t\neq j}|a_{jt}|)$$

$$>\sum_{t\in N_2}|a_{it}|\sum_{t\in N_1}|a_{jt}|\sigma_t(A),\ i\in N_1,\ j\in N_2\},$$

$$\bar{J}(A)=\{i,j\in N\ |\ (\Lambda_i(A)-\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|\sigma_t(A))(|a_{jj}|-\sum_{t\in N_2,t\neq j}|a_{jt}|)$$

* 1995年3月1日收到 1997年8月20日收到修改稿

$$= \sum_{t\in N_2}|a_{it}|\sum_{t\in N_1}|a_{jt}|\sigma_t(A),\ i\in N_1,\ j\in N_2\},$$

$$J_0(A) = \{i\in N_1 \mid \sum_{t\in N_2}|a_{it}| = 0\},$$

$$Z^{n\times n} = \{(a_{ij})\in R^{n\times n} \mid a_{ij}\le 0,\ i\ne j,\ i,j\in N\}.$$

$N_1(N_2)$ 为单点集时规定 $\sum_{t\in N_1, t\ne i}\bullet = 0(\sum_{t\in N_2, t\ne i}\bullet = 0)$. 为书写方便, 以上诸符号未特别指明时, 文中均以简记形式 如 Λ_i, σ_t 和 J 等均分别表示 $\Lambda_i(A)$, $\sigma_t(A)$ 和 $J(A)$. 不失一般性, 本文总假定所讨论的矩阵 $A = (a_{ij})$ 满足 $a_{ii}\ne 0$ 且 $\sigma_i > 0$, $\forall i\in N$.

定义 设 $A = (a_{ij})\in C^{n\times n}$ 满足 $N_2^+\ne\varnothing$ 及

$$(\Lambda_i - \sum_{t\in N_1, t\ne i}|a_{it}|\sigma_t)(|a_{jj}| - \sum_{t\in N_2, t\ne j}|a_{jt}|)\ge \sum_{t\in N_2}|a_{it}|\sum_{t\in N_1}|a_{jt}|\sigma_t,\ \forall i\in N_1,\ j\in N_2,\quad(1)$$

则称 A 为局部对角占优矩阵, 记作 $A\in LD_0$; 若(1)式中每一不等号均是严格的, 则称 A 为严格局部对角占优矩阵, 记作 $A\in LD$; 若存在正对角阵 X 使 $AX\in LD$, 则称 A 为广义严格局部对角占优矩阵, 记作 $A\in LD^*$.

易见, 当 $A\in LD_0$ 且 $\tilde{J}\ne\varnothing$ 时, $N_1 = N_1^+\cup N_1^0$, $N_2 = N_2^+\cup N_2^0$; 当 $A\in LD$ 时, $N_1 = N_1^+$, $N_2 = N_2^+$.

2 主要结果

先给出非奇 H 矩阵的一个必要条件.

定理 1 设 $A = (a_{ij})\in C^{n\times n}$ 为非奇 H 矩阵, 满足 $N_1^+\ne\varnothing$ 且 $J_0\cap N_1^+ = \varnothing$, 则存在 (i,j), $i\in N_1$, $j\in N_2$ 使

$$(\Lambda_i - \sum_{t\in N_1, t\ne i}|a_{it}|\sigma_t)(|a_{jj}| - \sum_{t\in N_2, t\ne j}|a_{jt}|) > \sum_{t\in N_2}|a_{it}|\sum_{t\in N_1}|a_{jt}|\sigma_t.$$

证明 若对任意 (i,j), $i\in N_1$, $j\in N_2$, 均有

$$(\Lambda_i - \sum_{t\in N_1, t\ne i}|a_{it}|\sigma_t)(|a_{jj}| - \sum_{t\in N_2, t\ne j}|a_{jt}|)\le \sum_{t\in N_2}|a_{it}|\sum_{t\in N_1}|a_{jt}|\sigma_t.\quad(2)$$

由于 $N_1^+\ne\varnothing$ 且 $N_1^+\cap J_0 = \varnothing$, 则可以选取正数 d_0 使之满足

$$\max_{i\in N_1^+}\frac{\Lambda_i - \sum_{t\in N_1, t\ne i}|a_{it}|\sigma_t}{\sum_{t\in N_2}|a_{it}|}\le d_0\le \min_{j\in N_2^+}\frac{\sum_{t\in N_1}|a_{jt}|\sigma_t}{|a_{jj}| - \sum_{t\in N_2, t\ne j}|a_{jt}|},$$

令 $X_0 = \mathrm{diag}(x_i \mid x_i = \sigma_i,\ i\in N_1;\ x_i = d_0,\ i\in N_2)$, 记 $B = AX_0 = (b_{ij})$, 则容易验证 B 满足: $|b_{ii}|\le\Lambda_i(B)$, $\forall i\in N$. 所以由[2, 定理 1]知 $B\notin D^*$, 进而有 $A\notin D^*$.

下面给出非奇 H 矩阵的等价条件和充分条件.

定理 2 设 $A\in C^{n\times n}$, 则 $A\in D^*\Leftrightarrow A\in LD^*$.

证明 充分性 由 $A\in LD^*$, 则存在正对角阵 X 使 $B = (b_{ij}) = AX\in LD$, 根据本文约定 $\sigma_i(A) > 0$, 则有 $\sigma_i(B) > 0$ 且 $b_{ii}\ne 0$, $\forall i\in N$. 设

$$M_i(B) = \frac{1}{\sum_{t\in N_2}|b_{it}|}[\Lambda_i(B) - \sum_{t\in N_1, t\ne i}|b_{it}|\sigma_t(B)],\quad i\in N_1.$$

由$B\in LD$知$N_1=N_1(B)$，从而$M_i(B)>0,\forall i\in N_1$，当$\sum_{t\in N_2}|b_{it}|=0$时，记$M_i(B)=+\infty$，设

$$m_j(B)=\frac{\sum_{t\in N_1}|b_{jt}|\sigma_t(B)}{|b_{jj}|-\sum_{t\in N_2,t\neq j}|b_{jt}|},\quad j\in N_2$$

由$B\in LD$知$N_2^+=N_2^+(B)$。从而$m_j(B)\geq 0,\forall j\in N_2$。又由$B\in LD$有$M_i(B)>m_j(B)$，$\forall i\in N_1,j\in N_2$。故存在$d>0$使

$$0\leq\max_{j\in N_2}m_j(B)<d<\min_{j\in N_1}M_i(B)\leq+\infty \tag{3}$$

令$Y=\mathrm{diag}(y_i|y_i=\sigma_i(B),i\in N_1;y_i=d,i\in N_2)$记$C=(c_{ij})=BY$，则$C$满足：当$i\in N_1$时，

$$\begin{aligned}|c_{ii}|-\Lambda_i(c)&=\sigma_i(B)|b_{ii}|-(\sum_{t\in N_1,t\neq i}|b_{it}|\sigma_t(B)+d\sum_{t\in N_2}|b_{it}|)\\&=\Lambda_i(B)-\sum_{t\in N_1,t\neq i}|b_{it}|\sigma_t(B)-d\sum_{t\in N_2}|b_{it}|,\end{aligned}$$

当$\sum_{t\in N_2}|b_{it}|=0$时，由$N_1=N_1^+(B)$得

$$|c_{ii}|-\Lambda_i(c)=\Lambda_i(B)-\sum_{t\in N_1,t\neq i}|b_{it}|\sigma_t(B)>0;$$

当$\sum_{t\in N_2}|b_{it}|\neq 0$时，由(3)得

$$\begin{aligned}|c_{ii}|-\Lambda_i(c)&>\Lambda_i(B)-\sum_{t\in N_1,t\neq i}|b_{it}|\sigma_t(B)-\min_{t\in N_1}M_i(B)\sum_{t\in N_2}|b_{it}|\\&\geq\Lambda_i(B)-\sum_{t\in N_1,t\neq i}|b_{it}|\sigma_t(B)-M_i(B)\sum_{t\in N_2}|b_{it}|=0;\end{aligned}$$

当$i\in N_2$时，由$N_2=N_2^+(B)$有

$$\begin{aligned}|c_{ii}|-\Lambda_i(c)&=d|b_{ii}|-(\sum_{t\in N_1}|b_{it}|\sigma_t(B)+d\sum_{t\in N_2,t\neq i}|b_{it}|)\\&=d(|b_{ii}|-\sum_{t\in N_2,t\neq i}|b_{it}|)-\sum_{t\in N_1}|b_{it}|\sigma_t(B)\\&>m_i(B)(|b_{ii}|-\sum_{t\in N_2,t\neq i}|b_{it}|)-\sum_{t\in N_1}|b_{it}|\sigma_t(B)=0.\end{aligned}$$

可见$\forall i\in N$有$|c_{ii}|>\Lambda_i(c)$。即$c\in D$。注意到XY仍为正对角阵且$A(XY)=c\in D$，所以$A\in D^*$。

必要性　设$A\in D^*$，则存在正对角阵X使$B=(b_{ij})=AX$满足$|b_{ii}|>\Lambda_i(B),\forall i\in N$，所以$\sigma_i(B)=\frac{\Lambda_i(B)}{|b_{ii}|}<1,i\in N$。因而$|b_{jj}|-\sum_{t\in N_2,t\neq j}|b_{jt}|>\sum_{t\in N_1}|b_{jt}|\geq\sum_{t\in N_1}|b_{jt}|\sigma_t(B),j\in N_2$。且$\Lambda_i(B)-\sum_{t\in N_1,t\neq i}|b_{it}|\sigma_t(B)\geq\Lambda_i(B)-\sum_{t\in N_1,t\neq i}|b_{it}|=\sum_{t\in N_2}|b_{it}|,i\in N_1$。注意到由$\Lambda_i(B)>0$必有$\Lambda_i(B)-\sum_{t\in N_1,t\neq i}|b_{it}|\sigma_t(B)>0$，因此有

$$(\Lambda_i(B)-\sum_{t\in N_1,t\neq i}|b_{it}|\sigma_t(B))(|b_{jj}|-\sum_{t\in N_2,t\neq j}|b_{jt}|)>\sum_{t\in N_2}|b_{it}|\sum_{t\in N_1}|b_{jt}|\sigma_t(B),$$

$\forall i \in N_1, j \in N_2$. 而由 $B \in D$ 知 $N_2^+(B) = N_2 \neq \varnothing$, 从而 $B = AX \in LD$. 即 $A \in LD^*$.

推论 1　设 $A \in LD$, 则 $A \in D^*$.

注 1　类似定理 2 必要性之证明, 可知若 $A \in D$, 则 $A \in LD$, 因而 $D \subseteq LD$.

注 2　当 $N_2 = J$ 时, 推论 1 便是文[1]之定理 2, 因此, 推论 1 包含了文[1]之定理 2. 例如设

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ \frac{5}{12} & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix},$$

则 A 不满足文[1]定理 2, 定理 3 及定理 4 的条件. 但若取 $N_1 = \{1, 2\}, N_2 = \{3\}$, 可知 A 满足本文推论 1 的条件, 因此 $A \in D^*$.

引理 1[3]　设 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$ 为对角占优矩阵, 则 $A \in D^*$ 当且仅当 A 为具有非零元素链对角占优矩阵.

引理 2[3]　设 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n}$, P, Q 为任意非奇异对角阵, 则 $A \in D^*$ 等价于 $PAQ \in D^*$.

设 $\alpha \subseteq N$, 以 $A(\alpha)$ 表行列足码皆为 α 中元素之主子阵. 下面给出当 $A \in LD_0$ 时 $A \in D^*$ 的充要条件.

定理 3　设 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n} \cap LD_0, \tilde{J} \neq \varnothing$ 满足

(i)　$\exists j_0 \in N_2^+, t_0 \in N_1$ 使 $a_{j_0 t_0} \neq 0$,

(ii)　$N_2^0 = \varnothing$ 或当 $i \in N_2^0$ 时有 $a_{it} = 0, \forall t \in N_1$.

则 A 为非奇 H 矩阵当且仅当 $\forall i \in Q_1$ 存在非零元素链 $a_{ir_1}, a_{r_1r_2}, \cdots, a_{r_{s_j}}$ 使 $j \in Q_2$. 其中

$$Q_1 = ((N_1 \cap \bar{J}) \setminus J_0) \cup (N_1^0 \cap J_0) \cup (N_2^+ \cap \bar{J}) \cup N_2^0, Q_2 = N - Q_1.$$

证明　充分性. 由于 $A \in LD_0, \tilde{J} \neq \varnothing$, 则 $N_1 = N_1^+ \cup N_1^0, N_2 = N_2^+ \cup N_2^0$, 令

$$M_i = \frac{1}{\sum_{t\in N_2} |a_{it}|}[\Lambda_i - \sum_{t\in N_1, t\neq i} |a_{it}|\sigma_t], \quad i \in N_1, \tag{4}$$

$$m_j = \frac{\sum_{t\in N_1} |a_{jt}|\sigma_t}{|a_{jj}| - \sum_{t\in N_2, t\neq j} |a_{jt}|}, \quad j \in N_2^+. \tag{5}$$

当 $\sum_{t\in N_2} |a_{it}| = 0$ 时, 记 $M_i = +\infty$, 由(1)则有 $\max_{j\in N_2^+} m_j \leq \min_{i\in N_1} M_i$, 因 $N_2^+ \neq \varnothing$, 则由题设条件(i)知存在一 $j_0 \in N_2^+$ 使 $m_{j_0} > 0$, 即 $\max_{j\in N_2^+} m_j > 0$, 因而存在一正数 d 使 $0 < \max_{j\in N_2^+} m_j \leq d \leq \min_{i\in N_1} M_i$, 当且仅当 $j \in N_2^+ \cap \bar{J}$ 或 $i \in N_1 \cap \bar{J}$ 时上式成立等号. 令 $X = \mathrm{diag}(x_i | x_i = \sigma_i, i \in N_1; x_i = d, i \in N_2)$, 记 $B = (b_{ij}) = AX$, 则类似定理 2 充分性之证明可知 B 满足: 当 $i \in Q_1$ 时, $|b_{ii}| = \Lambda_i(B)$, 当 $i \in Q_2$ 时, $|b_{ii}| > \Lambda_i(B)$. 由于 $\tilde{J} \neq \varnothing$ 及 $N_2^+ \neq \varnothing$, 则有 $N_2^+ \setminus \bar{J} \neq \varnothing$, 进而知 $Q_2 \neq \varnothing$. 所以由题设条件知 B 为具有非零元素链对角占优矩阵, 由引理 1 知 $B = AX \in D^*$. 进一步由引理 2 得 $A \in D^*$.

必要性　因为 $A \in LD_0$ 且条件(i), (ii)成立. 同充分性证明一样存在正对角阵 X 使 $B = (b_{ij}) = AX$ 为对角占优阵, 且满足当 $i \in Q_1$ 时 $|b_{ii}| = \Lambda_i(B)$, 当 $i \in Q_2$ 时 $|b_{ii}| > \Lambda_i(B)$, 而 Q_2

$\neq \varnothing$, 由 $A \in D^*$ 知 $B \in D^*$. 则由引理 1 知 B 为具有非零元素链对角占优矩阵, 而 A 与 B 有相同的非零元, 故定理必要性得证

推论 2 设 $A = (a_{ij}) \in C^{n\times n} \cap LD_0$ 为不可约矩阵, $\tilde{J} \neq \varnothing$ 且满足 $N_2^0 = \varnothing$ 或当 $i \in N_2^0$ 时, 有 $a_{it} = 0, \forall t \in N_1$. 则 A 为非奇 H 矩阵

注 3 显然, 定理 3 之充分性与推论 2 分别包含了文[1] 之定理 4 和定理 3. 因文[1] 的结果是本文的结果当 $N_2 = J$ 时之特款

注 4 若 $A \in Z^{n\times n}$ 且 $a_{ii} > 0, \forall i \in N$. 则本文的结果分别给出了 M - 矩阵的等价表征, 充分条件和必要条件

参 考 文 献

[1] 黄廷祝, 非奇 H 矩阵的简捷判据, 计算数学, 3(1993), 318—328.

[2] 逄明贤, 广义对角占优矩阵的判定及应用, 数学年刊, 6A: 3(1985), 323- 330.

[3] M. Neumann, *A note on generalizations of strict diagonal dominance for real matrices*, Linear Alg. Appl., 26(1979), 3- 14.

Equivalence Conditions of Nonsingular H-Matrices and M-Matrices

Li Qingchun

(Dept. of Math., Jilin Teachers' College, Jilin 132011)

Abstract

In this paper, we introduce the concept of locally diagonally dominant matrices and obtain some equivalence conditions and some criteria of nonsingular H-matrices and M-matrices, these results improve main results in [1].

Keywords locally diagonally dominant matrix, nonsingular H-matrix, M-matrix.