

结合环类中的 E -单环*

雍 锡 琪

(安徽大学数学系, 合肥230039)

摘 要 在全部结合环类中, 对幂等根 E , 定义了 E -单环. 本文给出 E -单环的一个刻画

画

关键词 根, 幂等环, 幂零

分类号 AMS(1991) 16N80/CCL O153.3

在有限结合环类^[1]中, 对幂等根类 E , 考察了 E -单环. 用 E -单环, 刻画了全部具有 Ω 同态闭性质的根类. 本文在全部结合环类中, 就幂等根 E , 给出 E -单环一个刻画.

定义1 如果环 $R \in E$, 且 R 的任意非零真理想不属于 E , 则称 R 为 E -单环.

引理1 设 $R \in E$, 则 R 是 E -单环的充要条件是 R 的非零真理想都是 E 半单环.

证明 设 R 为 E -单环, $\forall I, 0 \neq I \triangleleft R, I \notin E$, 有 $E(I) \triangleleft R, E(I) \neq R$, 因而 $E(I) = 0$, 即 I 是 E 半单的. 反之, 是显然的.

定理2 设 R 是 Artin 环, $R \in E, R \neq 0$, 则下列命题等价:

- 1) R 是 E -单环
- 2) R 的非零真理想幂零.
- 3) $R/K(R)$ 是单环, ($K(R)$ 是 R 的幂零根).

证明 1) $\Rightarrow$ 2) 设 R 是 E -单环, 取 R 的任一非零真理想 A , 有 R 的理想降链 $R \supseteq A \supseteq A^2 \supseteq \dots \supseteq A^n \supseteq \dots$, 由于 R 是 Artin 环, 存自然数 n , 使 $A^n = A^{n+1}$. 若 $A^n \neq 0$, 则由于 $(A^n)^2 = A^n$, 从而 $A^n \in E, 0 \neq A^n \triangleleft R, A^n \notin E$, 与 R 是 E -单环矛盾. 因而 $A^n = 0$. 2) $\Rightarrow$ 1), 是显然的.

2) $\Rightarrow$ 3) 设 R 的非零真理想幂零, 如果 $R/K(R)$ 不是单环, 因为 R 是 Artin 环, 则存在 B , 使 $K(R) \subset B \triangleleft R, B \neq R, B/K(R)$ 是单环. 但因 B 是 R 的非零真理想, 所以 B 幂零, 于是 $B/K(R)$ 幂零, 矛盾. 再看 3) $\Rightarrow$ 2), 设 $R/K(R)$ 是单环, 如果存在 R 的非零真理想 A 不是幂零环, 由 R 是 Artin 环, 则 $A \not\subseteq K(R)$, 有 $0 \neq A + K(R)/K(R) \triangleleft R/K(R)$, 因而 $A + K(R)/K(R) = R/K(R)$, $A + K(R) = R$. 于是 $R/A = A + K(R)/A \simeq K(R)/A \cap K(R)$. 由于 $K(R)$ 幂零, 因而 R/A 幂零, 又由 R 幂等, 因而 R/A 幂等, 于是 $R/A = 0, R = A$, 矛盾.

推论3 Artin 的 E -单环的同态象仍是 E -单环.

证明 由 Artin 的 E -单环的刻画2) 即得.

下面给出一般 E -单环的一个描述. 它是定理2中, Artin 的 E -单环刻画2) 的推广. 在[2]

* 1995年2月27日收到

中, 对任意环, 用超限归纳法定义了一种幂 记 $R^{2^0} = R$. 假定对任意序数 $\alpha, 0 \leq \alpha < \beta, R^{2^\alpha}$ 已定义, 则当 β 不是极限序数时, 定义 $R^{2^\beta} = (R^{2^{\beta-1}})^2$, 当 β 是极限序数时, 定义 $R^{2^\beta} = \bigcap_{\alpha < \beta} R^{2^\alpha}$. 易证 对任意 β , 有 $R^{2^\beta} \triangleleft R$, 对任意 $\alpha, \beta, \alpha < \beta$, 有 $R^{2^\alpha} \supseteq R^{2^\beta}$.

引理4 R 是 E -半单环的充要条件是: 存在序数 α , 使 $R^{2^\alpha} = 0$

证明 设 R 是 E -半单环, R 总理想的无限降链 $R \supseteq R^2 \supseteq R^{2^2} \supseteq \dots \supseteq R^{2^\alpha} \supseteq \dots$ 因为 R 是集合, 所以这个降链不是真降链, 存在序数 $\alpha, \beta, \alpha < \beta$, 使得 $R^{2^\alpha} = R^{2^\beta}$. 因而 $\alpha < \alpha^+ \leq \beta, R^{2^\alpha} \supseteq R^{2^{\alpha^+}} \supseteq R^{2^\beta}$. 于是 $R^{2^\alpha} = R^{2^{\alpha^+}}$, 因而 $R^{2^\alpha} = (R^{2^\alpha})^2$, 若 $R^{2^\alpha} \neq 0$, 则 $R^{2^\alpha} \in E$, 而 $R^{2^\alpha} \triangleleft R$, 与 R 是 E -半单环矛盾 于是 $R^{2^\alpha} = 0$

设存在序数 α , 使得 $R^{2^\alpha} = 0$ 如果 R 不是 E 半单环, 则 R 有非零的幂等理想 I . 对任意序数 β , 能有 $I^{2^\beta} \subseteq R^{2^\beta}$. 当 $\beta = 0$ 时, $I \subseteq R$. 假设对序数 $\gamma, 0 \leq \gamma < \beta$, 已有 $I^{2^\gamma} \subseteq R^{2^\gamma}$. 当 β 不是极限序数时, $I^{2^\beta} = (I^{2^{\beta-1}})^2 \subseteq (R^{2^{\beta-1}})^2 = R^{2^\beta}$. 当 β 是极限序数时, 对任意 $\gamma < \beta, I^{2^\beta} = \bigcap_{\gamma < \beta} I^{2^\gamma} \subseteq I^{2^\gamma} \subseteq R^{2^\gamma}$, 所以 $I^{2^\beta} \subseteq \bigcap_{\gamma < \beta} R^{2^\gamma} = R^{2^\beta}$. 另外, 对任意序数 $\beta \geq 1$, 能有 $I^{2^\beta} = I$. 当 $\beta = 1$ 时, $I^2 = I$. 假设对任意 $1 \leq \gamma < \beta$, 均有 $I^{2^\gamma} = I$. 则当 β 不是极限序数时, $I^{2^\beta} = (I^{2^{\beta-1}})^2 = I^2 = I$. 当 β 是极限序数时, $I^{2^\beta} = \bigcap_{\gamma < \beta} I^{2^\gamma} = \bigcap_{\gamma < \beta} I = I$. 综上所述, 特别对序数 α , 有 $I^{2^\alpha} \subseteq R^{2^\alpha}$ 且 $I^{2^\alpha} = I$, 从而 $I = 0$, 矛盾 所以 R 是 E -半单环

定理5 $R \in E$, 则 R 是 E -单环的充要条件是, R 的任意非零真理想 I , 存在序数 α , 使 $I^{2^\alpha} = 0$

证明 由引理1, 4即得

在有限结合环类中, 设全部 E -单环, 组成的环类记为 Ω_E , 有性质: Ω_E 是同态闭的 但在全部结合环类中, 这个性质不成立

例 设 Z 是整数环, 则 Z 是幂等环 它的任一非零真理想为 (n) , n 是大于1的整数 由于 $(n)^2 \subset (n)$, 因而 Z 是 E -单环 但是, Z 有同态象 $Z/(6) \simeq Z/(2) \oplus Z/(3)$, 即 Z 的同态象不一定是 E -单环

参 考 文 献

- [1] 雍锡琪, 有限结合环类根论中的 $\mathcal{Y}$ -单环, 哈尔滨师范大学自然科学学报, 3: 1(1987), 1- 6
- [2] В А Андрунакиевич Антипростые сильно идемпотентные ИАН СССР, 1957, 21 С., 125- 144

E-Simple Rings in the Class of All Associative Rings

Yong X iqi

(Dept. of Math., Anhui University, Hefei 230039)

Abstract

In the class of all associative rings we defined E -simple ring for idempotent radical class E . It is proved that R is E -simple ring iff for any $I, 0 \neq I \triangleleft R, I \neq R, I^{2^\alpha} = 0$ for some ordinal number α .

Keywords radical, idempotent ring, nilpotent ring