

矩阵方程 $X + A^T X^{-1} A = I$ 的正定解及反问题求解*

蒋永泉

(徐州师范大学数学系, 江苏221009)

摘要 本文得到矩阵方程 $X + A^T X^{-1} A = I$ 的反问题的充要条件及反问题解的一般形式, 进而得到正定解的充要条件及一定条件下正解的一般形式

关键词 矩阵方程, 正定解, 反问题

分类号 AM S(1991) 15A 24/CCL O 151. 21

矩阵方程

$$X + A^T X^{-1} A = I, \quad (1)$$

其中 A 为 n 阶实方阵, A^T 为 A 的转置, I 为 n 阶单位矩阵. 在[1]中, 作者提出了(1)的正定解问题, 文[2], [3]对(1)的正定解问题作了许多有益的工作. 本文对(1)的反问题进行讨论, 得到了(1)的反问题有解的充要条件及反问题解的一般形式, 进而得到(1)有正定解的充要条件及 A 在一定条件下(1)的正定解的一般形式.

定理1 (1)的反问题有解的充要条件是正定阵 X 的特征值不大于1. 且此时(1)的反问题解的一般形式为

$$A = U \operatorname{diag}(\lambda_1^{\frac{1}{2}}) Q \operatorname{diag}((1 - \lambda_1^{\frac{1}{2}})) U^T, \quad (2)$$

其中 λ_i 是 X 的特征值, U 是适合 $U^T X U = \operatorname{diag}(\lambda) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 的正交阵, 而 Q 为任意 n 阶正交阵.

定理2 (1)有正定解的充要条件是 A 可以表示成(2)的形式, 其中 $0 < \lambda_i \leq 1$, U, Q 为正交阵, 且此时 $X = U \operatorname{diag}(\lambda) U^T$ 是(1)的一个正定解.

定理3 若 A 可表示成(2)的形式, 则 A 的谱半径一定不大于 $\frac{1}{2}$.

能表示成形式(2)的矩阵 A 的谱半径一定不大于 $\frac{1}{2}$, 但 A 不一定是正规矩阵, 例

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可表示成(2)的形式, 但 A 不正规. 因而本文定理2的结论要比文[3]中定理11的结论更广泛.

* 1995年3月20日收到 1997年9月10日收到修改稿

进一步, 当 A 的谱半径不大于 $\frac{1}{2}$, 且相似于对角阵时, (1) 有正定解, 并可求出解的一般形式

定理4 设

$$A = U \begin{pmatrix} a_1 I_{i_1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_s I_{i_s} \\ & & & 0 \end{pmatrix} U^T, \quad (3)$$

其中 $a_1, \dots, a_s$ 互不相同, 且 $0 < a_j \leq \frac{1}{2}$, I_{i_j} 为 i_j 阶单位矩阵, $i_1 + \dots + i_s = r$, U 为正交阵, 则(1)有正定解, 且解的一般形式是

$$X = U \begin{pmatrix} X_1 & & \\ & \ddots & \\ & & X_s \\ & & & I_{n-r} \end{pmatrix} U^T,$$

其中

$$X_j = U_j \begin{pmatrix} \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a_j^2}}{2} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a_j^2}}{2} \end{pmatrix} U_j^T,$$

而 U_j 是任意 i_j 阶正交阵, $j = 1, 2, \dots, s$, n 是 A 的阶数

定理2的证明可将(3)代入(1), 通过解矩阵方程来完成

对(1)的讨论可很方便地推广到复数域上

参 考 文 献

- [1] W. N. Anderson, Jr, T. D. Morley, *Lin Alg Appl*, 134(1990), 53- 62
- [2] J. C. Engwerda, A. C. M. Ran and A. L. Rijkeboer, *Lin Alg Appl*, 186(1993), 255- 275
- [3] J. C. Engwerda, *Lin Alg Appl*, 194(1993), 91- 108