第 18 卷第 2 期 数 学 研 究 与 评 论 Vol. 18 No. 2
1998 年 5 月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1998

一类二阶非线性泛函微分方程解的渐近性及振动性*

邓 立 虎
(东莞理工学院计算中心, 广东莞城 511700)

摘 要 本文讨论二阶非线性泛函微分方程

$$\frac{d}{dt}\varphi(t, x(t), x'(t)) + \sum_{i=0}^{n} \frac{d}{dt} g_i(t, x(h_i(t))) + \sum_{i=0}^{n} q_i(t, x(h_i(t))) = f(t) \qquad \text{(E)}$$

解的渐近性及振动性

关键词 非线性泛函微分方程, 渐近性, 振动性
分类号 AMS(1991) 39B/CCL O175.13

关于线性泛函微分方程解的渐近性及振动性, 已有大量的研究. 但对非线性泛函微分方程解的渐近性及振动性的研究结果还比较少. [1]研究了如下泛函微分方程

$$(r(t)x'(t))' + \sum_{i=0}^{n} p_i(t) g_i'(x(t-\tau_i(t))) + \sum_{i=0}^{n} q_i(t) g_i(x(t-\tau_i(t))) = f(t) \qquad (1)$$

的解的渐近性, 这是一类拟线性泛函微分方程(解或延迟解的低阶项是非线性的), 文[2]研究如下方程

$$(r(t)x'(t))' + \sum_{i=0}^{n} G_u^i(t, x(h_i(t)))x'(h_i(t)) + \sum_{i=0}^{n} Q^i(t, x(h_i(t))) = f(t) \qquad (2)$$

的渐近性, 对文[1]作了一些推广. 本文研究如下非线性泛函微分方程

$$\frac{d}{dt}\varphi(t, x(t), x'(t)) + \sum_{i=0}^{n} \frac{d}{dt} g_i(t, x(h_i(t))) + \sum_{i=0}^{n} q_i(t, x(h_i(t))) = f(t), \qquad \text{(E)}$$

当 $\varphi(t, x(t), x'(t)) = r(t)x'(t)$, 且 $g_i(t, x(h_i(t)))$ 与第一个变元无关(即 $\frac{\partial}{\partial t} g_i(t, u) = 0$)时, 方程(E)即为(2). 因此本文推广了文[1]及文[2]的方程类型(即从拟线性泛函微分方程推广到非线性泛函微分方程). 在一定的条件下, 得到方程(E)的几个渐近性及振动性结果.

本文始终假定:

(i) $h_i(t)$ 连续, $0 \le h_i(t) \le t$, $i = 0, 1, \cdots, n$, 且当 $t \to +\infty$ 时, $h_i(t) \to +\infty$, $i = 0, 1, \cdots, n$;

(ii) $f(t)$ 连续, $\int_0^t |f(s)| ds < \infty \ (\forall t > t_0)$.

定义 如果方程(E)的一个解 $x(t)$ 有任意大的实零点, 则称 $x(t)$ 是振动的, 当振动解 $x(t)$ 在 t 充分大以后, $x(t)$ 不变号, 则称 $x(t)$ 为 Z 型解. 如果 $x(t)$ 是最终为正或最终为负, 则称 $x(t)$ 为非振动解.

定理 1 假设方程(E)满足条件:

* 1995 年 3 月 7 日收到

1) $\varphi(t,u,v)v>0, v\neq 0$ 时; 且全导数 $\frac{d\varphi}{dt}$ 连续;

2) $g_i(t,u)u>0, u\neq 0$ 时; 且 $g_i(t,u)$ 连续可微;

3) 对任意正常数 T, 当 $t>T$ 时,

$$\sum_{i=0}^{n}\int q_i(s,x(h_i(s)))ds=+\infty\ (t\to+\infty).$$

则方程(E)的一切非振动解 $x(t)$ 满足 $x(t)\to c(t\to+\infty)$, 且(E)的 Z 型解 $x(t)\to 0(t\to\infty)$.

证明　不妨设 $x(t)$ 为(E)的最终正解, 即存在 $T>0$, $t>T$ 时, $x(t)>0$ 且有 $x(h_i(t))>0$, $0\leq i\leq n$. 方程(E)与下列方程等价

$$[\varphi(t,x(t),x'(t))+\sum_{i=0}^{n}g_i(t,x(h_i(t)))]'+\sum_{i=0}^{n}q_i(t,x(h_i(t)))=f(t), \tag{3}$$

对(3)两边由 T 到 t 积分($t>T$)

$$\varphi(t,x(t),x'(t))+\sum_{i=0}^{n}g_i(t,x(h_i(t)))-c_1=\int[f(s)-\sum_{i=0}^{n}q_i(s,x(h_i(s)))]ds$$

$$\varphi(t,x(t),x'(t))+\sum_{i=0}^{n}g_i(t,x(h_i(t)))\leq c-\sum_{i=0}^{n}\int q_i(s,x(h_i(s)))ds$$

令 $t\to+\infty$, 得

$$\varphi(t,x(t),x'(t))+\sum_{i=0}^{n}g_i(t,x(h_i(t)))\to-\infty\ (t\to+\infty). \tag{4}$$

当 $t\to+\infty$ 时, $x(h_i(t))>0$, 由条件(2) $g_i(t,x(h_i(t)))>0$, 于是

$$\varphi(t,x(t),x'(t))<0. \tag{5}$$

由条件(1), 得 $x'(t)\leq 0$, 所以 $x(t)$ 单调递减, 且有下界 $x(t)>0$, 其极限存在, 即有

$$\lim_{t\to+\infty}x(t)=c\geq 0.$$

对 Z 型解, 同上可证 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=c\geq 0$.

由于 Z 型解有子列 t_K, $K\to\infty$, $t_K\to+\infty$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}x(t_K)=0$, 故 $c=0$, 即 Z 型解收敛于 0.

注　在定理 1 中若把条件(2)改为:

设 $g_i(t,u)$ 对一切 $i=0,1,\cdots,n$ 有界, 且连续可微, 其它条件不变, 从证明过程知定理 1 的结论仍成立.

推论　若把定理 1 中条件(1)改为: $\varphi(t,u,v)=\varphi(t,u)\psi(v)$, $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$ 连续, 且 $\varphi(t,u)>0$ 及 $\psi(v)v>0, v\neq 0$ 时; 或 $\varphi(t,u)<0$ 及 $\psi(v)v<0, v\neq 0$ 时, 其它条件不变, 则定理 1 的结论仍成立.

证明　由于 $\varphi(t,u,v)v=\varphi(t,u)\psi(v)v>0$, 即条件(1)仍成立, 故定理 1 的结论成立.

例　给出如下二阶非线性泛函微分方程

$$(e^t x(x')^3)'+tx'(t-\tau_1)+ax(t-\tau_1)+e^t x^3(t-\tau_2)=3e^{-3t}+(a-t)e^{-t+\tau_2}+e^{-2t+3\tau_2},$$

其中 $a>1$, τ_1, τ_2 均为大于 0 的常数. 易知上述方程满足定理 1 的条件, 故所有非振动解 $x(t)$ 满足 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=c\geq 0$, Z 型解收敛于 0. 事实上, 上述方程有非振动解 $x(t)=e^{-t}\to 0(t\to\infty)$.

定理 2　设

1) $\frac{d\varphi}{dt}$ 连续, 且 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\varphi(t,x(t),x'(t))}{x(t)}=+\infty$;

2) $g_i(t,u)u>0, u\neq 0$ 时, $g_i(t,u)$ 连续可微;

3) 对任意常数 $T>0$, $t>T$ 时, 有

$$\sum_{i=0}^{n}\int q_i(s,x(h_i(s)))ds=+\infty \quad (t\to+\infty).$$

则方程(E)的一切解为振动解.

证明　不妨设 $x(t)$ 为(E)的最终正解, 即存在 $T>0$, $t>T$ 时, $x(t)>0$, $x(h_i(t))>0$. 由定理 1 的证明过程知, 当 $t\to\infty$ 时, (5) 式仍成立, 即

$$\varphi(t,x(t),x'(t))<0 \quad (t\to+\infty)$$

由 1), 对正数 $M_0>0$, 存在 $T_0>0$, $t>T_0$ 时, $\dfrac{\varphi}{x(t)}>M_0$, $M_0x(t)<\varphi(t,x(t),x'(t))<0$ $(t\to+\infty)$. 于是得 $x(t)<0$ 与假设 $x(t)$ 为最终正解矛盾. 故方程(E)的一切解为振动解.

定理 3　设

1) $\varphi(t,x(t),x'(t))=\varphi(t,x(t))\psi(x'(t))$, $\varphi(t,x(t))>0$ (t 充分大时), $\psi(v)$ 关于 v 单调不减, ψ 的反函数 ψ^{-1} 存在, 且

$$\int\psi^{-1}\left(\frac{A}{\varphi(s,x(s))}\right)ds=-\infty \quad (t\to+\infty)$$

其中 A 为任意常数;

2) $|g_i(t,u)|\leq M$ (正常数), $i=0,1,\cdots,n$;

3) $\int|q_i(s,x(h_i(s)))|ds<+\infty$ $(\forall t>T)$, $i=0,1,\cdots,n$.

则方程(E)的一切解为振动解.

证明　不妨设 $x(t)$ 为最终正解, 即存在 $T>0$, $t>T$ 时, $x(t)>0$, $x(h_i(t))>0$, 此时有下式成立

$$\varphi(t,x(t))\psi(x'(t))+\sum_{i=0}^{n}g_i(t,x(h_i(t)))$$

$$\leq c_1-\sum_{i=0}^{n}\int q_i(s,x(h_i(x)))ds\leq c_1+c_2=c\text{(常数)} \quad (t>T),$$

$$\varphi(t,x(t))\psi(x'(t))\leq c.$$

由条件 1),

$$\psi'(x'(t))\leq\frac{c}{\varphi(t,x(t))},\quad x'(t)\leq\psi^{-1}\left(\frac{c}{\varphi(t,x(t))}\right),$$

从 T 到 $t(t>T)$ 积分得

$$x(t)\leq x(T)+\int\psi^{-1}\left(\frac{c}{\varphi(s,x(s))}\right)ds\to-\infty \quad (t\to+\infty),$$

于是得 $x(t)<0$ $(t>T)$ 与 $x(t)$ 为最终正解的假设矛盾, 故方程(E)的一切解为振动解.

注　在定理 3 中, 若把条件 1) 改为:

$$\varphi(t,x(t),x'(t))=\varphi(t,x(t))\psi(x'(t)),\ \varphi(t,x(t))<0\ (t\text{ 充分大}),$$

$\psi(v)$ 关于 v 单调递减, ψ^{-1} 存在, 且 $\int\psi^{-1}\left(\dfrac{A}{\varphi(s,x(s))}\right)ds=-\infty$, 其中 A 为任意常数, 其它条件不变, 则定理 3 的结论仍成立.

参 考 文 献

[1] **李克难，一类二阶泛函微分方程解的渐近性，数学研究与评论**，5: 3(1985)，49- 53.

[2] **崔宝同，二阶泛函微分方程解的渐近理论，西南师范大学学报**，14: 2(1989)，19- 28.

[3] J. R. Graef, Takasi Kusano, Hiroshi Onose, W. Paul Spikes, *On the asymptotic behavior of oscillatory solutions of functional differential equations*, Funkcialaj Ekvacioj, 26(1983), 11- 16.

Asymptotic Behavior and Osiliation of the Solutions of a Class of Nonlinear Second Order Functional Differential Equations

Deng Lihu

(Dongguan Institute of Technology, Guangdong 511700)

Abstract

This paper deals with the asymptotic behavior and osillation of solution of nonlinear second order functional differential equations

$$\frac{d}{dt}\varphi(t, x(t), x'(t)) + \sum_{i=0}^{n}\frac{d}{dt}g_i(t, x(h_i(t))) + \sum_{i=0}^{n}q_i(t, x(h_i(t))) = f(t).$$

Some sufficient conditions for asympotic behavior and osillation of the solutions of this equation is obtained.

Keywords nonlinear functional differential equation, asymptotic behavior, osillation.