第 18 卷第 2 期　　数学研究与评论　　Vol. 18 No. 2
1998 年 5 月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 1998

二阶非线性微分方程解的 Sturm 比较定理*

庄 容 坤
(惠州大学数学系, 广东惠州 516015)

摘　要　本文首先建立二个微分恒等式, 然后利用它们研究了二类非线性微分方程与线性微分程之间解的 Sturm 比较定理, 所得结论包含了一些经典的结论

关键词　二阶非线性微分方程, 微分恒等式, Sturm 比较定理
分类号　AMS(1991) 34C10/CCL O175.4

考虑方程

$$(p_1(t)x')' + r_1(t)x' + q_1(t)x = 0, \tag{1}$$

$$(p_2(t)y')' + r_2(t)y' + q_2(t)f(y) = 0, \tag{2}$$

$$(p_2(t)y')' + r_2(t)y' + q_2(t)y = g(y). \tag{3}$$

设 $x(t)$ **是方程**(1) **的非平凡解, 且** $x(0) = x(1) = 0$, $I = [0, 1]$, $p_1(t), p_2(t), r_1(t), r_2(t), q_1(t), q_2(t) \in C'(I)$, $p_2(t) > 0$, $t \in I$, $f(u), g(u) \in C(-\infty, +\infty)$.

定理 1　**设** $y(t)$ **是方程**(2) **的非平凡解, 若** $y(t) \neq 0$, $t \in [0, 1]$, **则成立下面恒等式**

$$\left[\frac{x}{y}(yp_1x' - xp_2y')\right]' = (p_1 - p_2)x'^2 + p_2\left(\frac{r_2x}{2p_2} - x' + \frac{xy'}{y}\right)^2 + \left(q_2\frac{f(y)}{y} - q_1 - \frac{r_2^2}{4p_2}\right)x^2 + (r_2 - r_1)xx'.$$

证明

$$\left[\frac{x}{y}(yp_1x' - xp_2y')\right]' = (xp_1x')' - \left(\frac{x^2p_2y'}{y}\right)'$$

$$= p_1x'^2 + x(p_1x')' - \frac{x^2(p_2y')'}{y} - \frac{2xx'p_2y'}{y} + \frac{p_2x^2y'^2}{y^2}$$

$$= p_1x'^2 - r_1xx' - q_1x^2 + \frac{r_2x^2y'}{y} + q_2x^2\frac{f(y)}{y} - \frac{2xx'p_2y'}{y} + \frac{p_2x^2y'^2}{y^2}$$

$$= p_1x'^2 - r_1xx' + \left(q_2\frac{f(y)}{y} - q_1\right)x^2 + 2p_2\frac{xy'}{y}\left(\frac{r_2x}{2p_2} - x'\right) + p_2\left(\frac{xy'}{y}\right)^2$$

$$= p_1x'^2 + p_2\left(\frac{r_2x}{2p_2} - x' + \frac{xy'}{y}\right)^2 - p_2\left(\frac{r_2x}{2p_2} - x'\right)^2 + \left(q_2\frac{f(y)}{y} - q_1\right)x^2 - r_1xx'$$

$$= (p_1 - p_2)x'^2 + p_2\left(\frac{r_2x}{2p_2} - x' + \frac{xy'}{y}\right)^2 + \left(q_2\frac{f(y)}{y} - q_1 - \frac{r_2^2}{4p_2}\right)x^2 + (r_2 - r_1)xx',$$

即

* 1995 年 4 月 26 日收到

$$\left[\frac{x}{y}(yp_1x'-xp_2y')\right]'=(p_1-p_2)x'^2+p_2\left(\frac{r_2x}{2p_2}-x'+\frac{xy'}{y}\right)^2+\left(q_2\frac{f(y)}{y}-q_1-\frac{r_2^2}{4p_2}\right)x^2+(r_2-r_1)xx'.$$

定理 2 设 $y(t)$ 是方程(3) 的非平凡解, 若 $y(t)\neq 0,\ t\in[0,1]$, 则成立下面恒等式

$$\left[\frac{x}{y}(yp_1x'-xp_2y')\right]'=(p_1-p_2)x'^2+p_2\left(\frac{r_2x}{2p_2}-x'+\frac{xy'}{y}\right)^2+\left(q_2-q_1-\frac{r_2^2}{4p_2}\right)x^2+(r_2-r_1)xx'-\frac{g(y)}{y}x^2.$$

定理 2 的证法与定理 1 的证法类似, 故略

定理 3 设 0, 1 是方程(1) 的非平凡解 $x(t)$ 的两相邻零点, $p_1\geq p_2>0,\ q_2\geq q_1+\frac{r_2^2}{4p_2}+\frac{r_2'-r_1'}{2},\ t\in[0,1]$ 且在 $[0,1]$ 的任一子区间上等式不成立, 又 $\forall u\neq 0$, 有 $uf(u)\geq u^2$, 则方程(2) 的非平凡解 $y(t)$ 在 $[0,1]$ 内至少有一个零点

证明 若不然, $y(t)\neq 0,\ t\in[0,1]$, 则由定理 1 有:

$$\left[\frac{x}{y}(yp_1x'-xp_2y')\right]'=(p_1-p_2)x'^2+p_2\left(\frac{r_2x}{2p_2}-x'+\frac{xy'}{y}\right)^2+\left(q_2\frac{f(y)}{y}-q_1-\frac{r_2^2}{4p_2}\right)x^2+(r_2-r_1)xx',$$

从 0 到 1 积分得:

$$\int_0^1\left[\frac{x}{y}(yp_1x'-xp_2y')\right]'dt=\int_0^1(p_1-p_2)x'^2dt+\int_0^1p_2\left(\frac{r_2x}{2p_2}-x'+\frac{xy'}{y}\right)^2dt+\int_0^1\left(q_2\frac{f(y)}{y}-q_1-\frac{r_2^2}{4p_2}-\frac{r_2'-r_1'}{2}\right)x^2dt,$$

又由于 $\int_0^1\left[\frac{x}{y}(yp_1x'-xp_2y')\right]'dt=0$, 从而

$$\int_0^1(p_1-p_2)x'^2dt+\int_0^1p_2\left(\frac{r_2x}{2p_2}-x'+\frac{xy'}{y}\right)^2dt+\int_0^1\left(q_2\frac{f(y)}{y}-q_1-\frac{r_2^2}{4p_2}-\frac{r_2'-r_1'}{2}\right)x^2dt=0.$$

但由已知条件可知上面的等式的左边大于零, 产生矛盾, 故 $y(t)$ 在 $[0,1]$ 内至少有一个零点

定理 4 设 $x(t)$ 是方程(1) 的满足 $x(0)=x'(\alpha)=0,\ \alpha\in(0,1)$ 的非平凡解, $r_2\geq r_1$, 其他条件同定理 3, 则方程(2) 的满足 $y(0)=0$ 的非平凡解 $y(t)$ 的导函数 $y'(t)$ 在 $(0,\alpha)$ 内有一个零点

证明 若有 $0<t_1\leq\alpha$ 使 $y(t_1)=0$, 由罗尔定理知: $\exists\ \tau\in(0,\alpha)$ 使 $y'(\tau)=0$, 定理显然成立

现设 $y(t)\neq 0,\ t\in(0,\alpha)$ 则由定理 1 有

$$\left[\frac{x}{y}(yp_1x'-xp_2y')\right]'=(p_1-p_2)x'^2+p_2\left(\frac{r_2x}{2p_2}-x'+\frac{xy'}{y}\right)^2+\left(q_2\frac{f(y)}{y}-q_1-\frac{r_2^2}{4p_2}\right)x^2+(r_2-r_1)xx',$$

从 0 到 α 积分得

$$\int[\frac{x}{y}(yp_1x'-xp_2y')]'dt=\int(p_1-p_2)x'^2dt+\int p_2(\frac{r_2x}{2p_2}-x'+\frac{xy'}{y})^2dt$$
$$+\int(q_2\frac{f(y)}{y}-q_1-\frac{r_2^2}{4p_2})x^2dt+\int(r_2-r_1)xx'dt$$

由于 $x(0)=0$, 故

$$\int(r_2-r_1)xx'dt=\frac{r_2-r_1}{2}x^2\Big|_0^{\alpha}-\int\frac{r_2'-r_1'}{2}x^2dt$$
$$=\frac{r_2(\alpha)-r_1(\alpha)}{2}x^2(\alpha)-\int\frac{r_2'-r_1'}{2}x^2dt,$$

又由于

$$\int[\frac{x}{y}(yp_1x'-xp_2y')]'dt=[\frac{x}{y}(yp_1x'-xp_2y')]_0^{\alpha}=-p_2(\alpha)\frac{x^2(\alpha)y'(\alpha)}{y(\alpha)}$$

从而

$$-p_2(\alpha)\frac{x^2(\alpha)y'(\alpha)}{y(\alpha)}=\int(p_1-p_2)x'^2dt+\int p_2(\frac{r_2x}{2p_2}-x'+\frac{xy'}{y})^2dt$$
$$+\int(q_2\frac{f(y)}{y}-q_1-\frac{r_2^2}{4p_2}-\frac{r_2'-r_1'}{2})x^2dt+\frac{r_2(\alpha)-r_1(\alpha)}{2}x^2(\alpha).$$

由已知条件, 显然上面等式的右边大于零, 即 $-p_2(\alpha)\frac{x^2(\alpha)y'(\alpha)}{y(\alpha)}>0$, 从而 $y'(\alpha)$ 与 $y(\alpha)$ 反号, 无妨设 $y(t)>0$, $t\in(0,\alpha)$, 则 $y'(0)>0$, $y'(\alpha)<0$, 由 $y'(t)$ 的连续性知: 存在 $\tau\in(0,\alpha)$, 使 $y'(\tau)=0$.

定理 5 设 0, 1 是方程(1) 的非平凡解 $x(t)$ 的两相邻零点, $p_1\geq p_2>0$, $q_2\geq q_1+\frac{r_2^2}{4p_2}+\frac{r_2'-r_1'}{2}$, $t\in[0,1]$ 且在 $[0,1]$ 的任一子区间上等号不成立, 又 $\forall u\neq 0$ 有 $ug(u)\leq 0$, 则方程(3) 的非平凡解 $y(t)$ 在 $[0,1]$ 内至少有一个零点,

证明 若不然, $y(t)\neq 0$, $t\in[0,1]$, 则由定理 2 有

$$[\frac{x}{y}(yp_1x'-xp_2y')]'=(p_1-p_2)x'^2+p_2(\frac{r_2x}{2p_2}-x'+\frac{xy'}{y})^2$$
$$+(q_2-q_1-\frac{r_2^2}{4p_2})x^2+(r_2-r_1)xx'-\frac{g(y)}{y}x^2,$$

从 0 到 1 积分得

$$\int[\frac{x}{y}(yp_1x'-xp_2y')]'dt=\int(p_1-p_2)x'^2dt+\int p_2(\frac{r_2x}{2p_2}-x'+\frac{xy'}{y})^2dt$$
$$+\int(q_2-q_1-\frac{r_2^2}{4p_2})x^2dt+\int(r_2-r_1)xx'dt-\int\frac{g(y)}{y}x^2dt$$

由于 $x(0)=x(1)=0$, 故

$$\int(r_2-r_1)xx'dt=\frac{r_2-r_1}{2}x^2\Big|_0^1-\int\frac{r_2'-r_1'}{2}x^2dt=-\int\frac{r_2'-r_1'}{2}x^2dt,$$

从而

$$\int[\frac{x}{y}(yp_1x'-xp_2y')]'dt=\int(p_1-p_2)x'^2dt+\int p_2(\frac{r_2x}{2p_2}-x'+\frac{xy'}{y})^2dt$$

$$+\int(q_2-q_1-\frac{r_2^2}{4p_2}-\frac{r_2'-r_1'}{2})x^2dt-\int\frac{g(y)}{y}x^2dt$$

显然, 由已知条件知上面等式的右边大于零, 但等式的左边

$$\int[\frac{x}{y}(yp_1x'-xy_2y')]'dt=[\frac{x}{y}(yp_1x'-xp_2y')]_0^1=0$$

产生矛盾, 故 $y(t)$ 在 $[0,1]$ 内至少有一个零点

定理 6　设 $x(t)$ 是方程(1) 的满足 $x(0)=x'(\alpha)=0, \alpha\in(0,1)$ 的非平凡解, $r_2\geq r_1$, 其他条件同定理 5, 则方程(3) 的满足 $y(0)=0$ 的非平凡解 $y(t)$ 的导函数 $y'(t)$ 在 $(0,\alpha)$ 内有一个零点

定理 6 的证法与定理 4 的证法类似, 故略

注 1　当 $f(u)\equiv u$ (或 $g(u)\equiv 0$), $p_1=p_2\equiv 1, r_1=r_2\equiv 0$ 时, 定理 3(或定理 5) 为 Sturm 比较定理

注 2　当 $f(u)\equiv u$ (或 $g(u)\equiv 0$), $r_1=r_2\equiv 0$ 时, 定理 3(或定理 5) 为 Sturm-Picone 比较定理

注 3　当 $f(u)\equiv u$ (或 $g(u)\equiv 0$), $p_1=p_2\equiv 1, r_1=r_2\equiv 0, \int(q_2-q_1)x^2dt>0$ 时, 定理 3(或定理 5) 为 Sturm-Leighton 比较定理

注 4　当 $f(u)\equiv u$ (或 $g(u)\equiv 0$), $r_1=r_2\equiv 0, \int[(p_1-p_2)x'^2+(q_2-q_1)x^2]dt>0$ 时, 定理 4(或定理 6) 为 Sturm-Leighton 关于解的导函数比较定理

参　考　文　献

[1] W. Leighton, *On the zero of solutions of a seeond order linear differential equation*, J. Math, Pure Appl, 3(1965), 297- 310.

[2] W. Leighton, *Some elementary Sturm theory*, J. Differential Equation 4(1968), 187- 193

[3] 邓宗琦, 常微分方程边值问题和 Sturm 比较理论引论(第一版), 华中师范大学出版社, 1987.

[4] 程崇高等, 一个微分-积分恒等式及其应用, 华中师范大学学报(自然科学版), 4(1993), 433- 435

Sturm Comparison Theorem of Solutions for Second Order Nonlinear Differential Equation

Zhuan Rongkun

(Dept. of Math., Huizhou University, Guangdong 516015)

Abstract

In this paper, we establish two differential identies and there by generalize some classical Sturm Comparison theorems

Keywords　second order nonlinear differential equation, differential identity, Sturm comparison theorem.