第 18 卷第 2 期　　数学研究与评论　　Vol. 18 No. 2
1998 年 5 月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 1998

关于 G-Matlis 自反模的换环定理*

黄 兆 泳
(北京师范大学数学系, 北京 100875)

摘　要　设 R 和 T 是 Noether 完备半局部环, $R\to T$ 是环同态. 本文证明了, 若 T 是有限生成或 Artin R-模, M 为 G-Matlis 自反 R-模, 则对所有 $n\geq 0$, $\mathrm{Ext}_R^n(T,M)$, $\mathrm{Ext}_R^n(M,T)$, $\mathrm{Tor}_n^R(T,M)$ 以及 $\mathrm{Tor}_n^R(M,T)$ 均是 G-Matlis 自反 T-模. 所得结果推广了 R. Belshoff 的结果.

关键词　G-Matlis 自反模, 换环定理, Noether 完备半局部环.
分类号　AMS(1991) 13C13, 13D15/CCL O153.3

一　引　言

本文所涉及的环均指交换环, 模指酉模.

[1]中将局部环上的 Matlis 对偶模和 Matlis 自反模[2]推广到了半局部环上的 G-Matlis 对偶模和 G-Matlis 自反模. 设 R 是半局部环, J 是其 Jacobson 根, $E(R/J)$ 表示 R/J 的内射包络. 设 M 为 R-模, 则称 $\mathrm{Hom}_R(M, E(R/J))$ 为 M 的 G-Matlis 对偶模, 记为 $M^\vee$. 显然可定义 $M^{\vee\vee}=(M^\vee)^\vee$. 定义自然同态 $\sigma_M: M\to M^{\vee\vee}$, $\sigma_M(x)(f)=f(x)$, 对任意 $x\in M$, $f\in M^\vee$. 因 $E(R/J)$ 是 R-模范畴的内射余生成元, 所以 σ_M 总是单射. 若 σ_M 是同构, 则称 M 为 G-Matlis 自反模.

[2]中设 R 和 T 是 Noether 完备局部环, $R\to T$ 是环同态, 若 T 是有限生成 R-模且 M 是 Matlis 自反 R-模, 则 $\mathrm{Hom}_R(T,M)$, $T\otimes_R M$ 是 Matlis 自反 T-模. 本文推广了这一结果, 设 R 和 T 是 Noether 完备半局部环, $R\to T$ 是环同态. 若 T 是有限生成或 Artin R-模且 M 为 G-Matlis 自反 R-模, 则对所有 $n\geq 0$, $\mathrm{Ext}_R^n(T,M)$, $\mathrm{Ext}_R^n(M,T)$ 和 $\mathrm{Tor}_n^R(T,M)$ ($\cong\mathrm{Tor}_n^R(M,T)$) 均是 G-Matlis 自反 T-模.

二　主要结果

引理 1　设 R 和 T 是任意环, $R\to T$ 是环同态, A 为 T-模(此时 A 当然也是 R-模). 若 A 是 Noether(Artin) R-模, 则 A 是 Noether(Artin) T-模.

证明　设 A 为 Noether R-模, $P_0\subseteq P_1\subseteq P_2\subseteq\cdots$ 为 A 的 T-子模升链. 显然该链为 A 的 R-子模升链. 而 A 为 Noether R-模, 所以该链稳定. 故 A 为 Noether T-模. 同理可证 Artin 模的

* 1995 年 7 月 11 日收到. 国家自然科学基金资助项目.

情形.

引理 2[3] 设 R 是 Noether 完备半局部环,M 为 R-模. 下列陈述等价:

1) M 是 Noether(Artin)模;

2) $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ 是 Artin(Noether)模, 对任意 Artin 模 N;

3) $\mathrm{Ext}_R^n(M,N)$ 是 Artin(Noether)模, 对任意 Artin 模 N 和任意 $n\geq 0$.

引理 3 设 R 是 Noether 完备半局部环,M 为 R-模. 下列陈述等价:

1) M 是 Noether(Artin)模;

2) $M\otimes_R N$ 是 Noether(Artin)模, 对任意 Noether 模 N;

3) $\mathrm{Tor}_n^R(M,N)$ 是 Noether(Artin)模, 对任意 Noether 模 N 和任意 $n\geq 0$.

证明 由[4]P28, 命题 5. 2′, $(M\otimes_R N)^{\vee}\cong\mathrm{Hom}_R(M,N^{\vee})$. 所以对任意 Noether 模 N, 由引理 2 及[1]命题 4 知, $M\otimes_R N$ 是 Noether(Artin)模 $\Leftrightarrow (M\otimes_R N)^{\vee}$ 是 Artin(Noether)模 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Hom}_R(M,N^{\vee})$ 是 Artin(Noether)模 $\Leftrightarrow M$ 是 Noether(Artin)模.

由[4]P120, 命题 5. 1, $\mathrm{Tor}_n^R(M,N)^{\vee}\cong\mathrm{Ext}_R^n(M,N^{\vee})$. 类似上面的证明可得, 对任意 Noether 模 N, $\mathrm{Tor}_n^R(M,N)$ 是 Noether(Artin)模 $\Leftrightarrow M$ 是 Noether(Artin)模, $n\geq 0$.

引理 4[5] 设 M 为 Artin R-模, N 为 G-Matlis 自反 R-模, 则 $\mathrm{Hom}_R(M,N)$, $\mathrm{Ext}_R^n(M,N)$, $n\geq 1$, 均为有限生成 R-模.

以下总设有环同态 $R\to T$, 且 R 和 T 均为 Noether 完备半局部环, 并且总是假设 M 为 G-Matlis 自反 R-模. 于是由[5]定理 1 知, 存在 M 的有限生成 R-子模 S, 使得 M/S 为 Artin R-模. 此时有正合列

$$0\to S\to M\xrightarrow{\pi}M/S\to 0. \qquad (1)$$

下面着手讨论换环定理.

情形 Ⅰ T 作为 R-模是有限生成(即 Noether)模.

定理 5 下列各模均为 G-Matlis 自反 T-模.

1) $\mathrm{Hom}_R(T,M)$, $\mathrm{Hom}_R(M,T)$;

2) $T\otimes_R M\ (\cong M\otimes_R T)$;

3) $\mathrm{Ext}_R^n(T,M)$, $\mathrm{Ext}_R^n(M,T)$, 任意 $n\geq 1$;

4) $\mathrm{Tor}_n^R(T,M)\ (\cong\mathrm{Tor}_n^R(M,T))$, 任意 $n\geq 1$.

下面分三步证明定理 5.

引理 6 $\mathrm{Hom}_R(T,M)$, $\mathrm{Ext}_R^n(T,M)$, $n\geq 1$, 是 G-Matlis 自反 T-模.

证明 由正合列(1)有如下正合列

$$0\to\mathrm{Hom}_R(T,S)\to\mathrm{Hom}_R(T,M)\xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(T,\pi)}\mathrm{Hom}_R(T,M/S). \qquad (2)$$

由引理 2, $\mathrm{Hom}_R(T,M/S)$ 是 Artin R-模. 又 $\mathrm{Hom}_R(T,S)$ 是 Noether R-模. 显然, $\mathrm{Hom}_R(T,S)$, $\mathrm{Hom}_R(T,M/S)$ 均为 T-模. 于是由引理 1 知, $\mathrm{Hom}_R(T,S)$ 是 Noether T-模, $\mathrm{Hom}_R(T,M/S)$ 是 Artin T-模. 由[6]定理 1, 它们均是 G-Matlis 自反 T-模. 又由正合列(2)有正合列 $0\to\mathrm{Hom}_R(T,S)\to\mathrm{Hom}_R(T,M)\to\mathrm{Im}\,\mathrm{Hom}_R(T,\pi)\to 0$. 由于 $\mathrm{Im}\,\mathrm{Hom}_R(T,\pi)\subset\mathrm{Hom}_R(T,M/S)$, 所以 $\mathrm{Im}\,\mathrm{Hom}_R(T,\pi)$ 为 G-Matlis 自反 T-模. 故 $\mathrm{Hom}_R(T,M)$ 为 G-Matlis 自反 T-模.

由正合列(1)可得正合列 $\mathrm{Ext}_R^n(T,S)\xrightarrow{i'}\mathrm{Ext}_R^n(T,M)\xrightarrow{\pi'}\mathrm{Ext}_R^n(T,M/S)$, $n\geq 1$. 由引理 1 和引

理 2 知, $Ext_R^n(T,S)$ 是 Noether T-模, $Ext_R^n(T,M/S)$ 是 Artin T-模, 从而为 G-Matlis 自反 T-模. 因 $Ker\, i\subseteq Ext_R^n(T,S)$, $Im\,\pi\subseteq Ext_R^n(T,M/S)$, 所以 $Ker\, i$, $Im\,\pi$ 均为 G-Matlis 自反 T-模. 故 $Ext_R^n(T,M)$ 为 G-Matlis 自反 T-模.

引理 7 $Hom_R(M,T)$, $Ext_R^n(M,T)$, $n\geq 1$, 是 G-Matlis 自反 T-模.

证明 由正合列(1)有如下正合列

$$0\to \mathrm{Hom}_R(M/S,T)\to \mathrm{Hom}_R(M,T)\to \mathrm{Hom}_R(S,T) \tag{3}$$

$$\mathrm{Ext}_R^n(M/S,T)\to \mathrm{Ext}_R^n(M,T)\to \mathrm{Ext}_R^n(S,T),\ n\geq 1. \tag{4}$$

显然 $Hom_R(S,T)$, $Ext_R^n(S,T)$ 均是有限生成 R-模. 由引理 1, 它们均是有限生成 T-模, 从而是 G-Matlis 自反 T-模. 又由于 T 为有限生成 R-模, 所以由引理 4, $Hom_R(M/S,T)$, $Ext_R^n(M/S,T)$ 为有限生成 R-模, 从而是有限生成 T-模. 所以它们也是 G-Matlis 自反 T-模. 于是由正合列(3)和(4)易知, $Hom_R(M,T)$, $Ext_R^n(M,T)$, $n\geq 1$, 为 G-Matlis 自反 T-模.

引理 8 $M\otimes_R T$, $Tor_n^R(M,T)$, $n\geq 1$, 是 G-Matlis 自反 T-模.

证明 由正合列(1)有正合列

$$S\otimes_R T\xrightarrow{i\otimes 1_T} M\otimes_R T\to M/S\otimes_R T\to 0. \tag{5}$$

由引理 3, $S\otimes_R T$ 是 Noether R-模, $M/S\otimes_R T$ 是 Artin R-模. 又 $S\otimes_R T$, $M/S\otimes_R T$ 是 T-模, 所以 $S\otimes_R T$ 是 Noether T-模, $M/S\otimes_R T$ 是 Artin T-模. 由正合列(5)有正合列 $0\to Ker\ i\otimes 1_T\to M\otimes_R T\to M/S\otimes_R T\to 0$. 由于 $Ker\ i\otimes 1_T\subset S\otimes_R T$, 所以 $Ker\ i\otimes 1_T$ 是有限生成 T-模. 由[6]定理 1, $Ker\ i\otimes 1_T$, $M/S\otimes_R T$ 均为 G-Matlis 自反 T-模. 因此 $M\otimes_R T$ 为 G-Matlis 自反 T-模.

由正合列(1)可得正合列 $Tor_n^R(S,T)\to Tor_n^R(M,T)\to Tor_n^R(M/S,T)$, $n\geq 1$. 类似引理 6 的证明可得, $Tor_n^R(M,T)$ 为 G-Matlis 自反 T-模.

结合引理 6, 引理 7 和引理 8 即得定理 5.

推论 9 设 M 为有限生成或 Artin R-模(此时知它必定是 G-Matlis 自反 R-模), 则定理 5 中的各模均是 G-Matlis 自反 T-模.

情形 Ⅱ T 作为 R-模是 Artin 模

引理 10 设 R 是 Noether 完备半局部环, M, N 为 Artin 模. 则 $M\otimes_R N$, $Tor_n^R(M,N)$, $n\geq 1$ 是 Artin 模.

证明 由[4] P28, 命题 5.2 及 P120, 命题 5.1 有, $(M\otimes_R N)^\vee\cong Hom_R(M,N^\vee)$, $Tor_n^R(M,N)^\vee\cong Ext_R^n(M,N^\vee)$, $n\geq 1$. 因 N 是 Artin 模, 所以 $N^\vee$ 是 Noether 模, 从而是 G-Matlis 自反模. 而由引理 4 知, $Hom_R(M,N^\vee)$, $Ext_R^n(M,N^\vee)$ 均有限生成. 因此 $(M\otimes_R N)^\vee$, $Tor_n^R(M,N)^\vee$, $n\geq 1$ 是有限生成模, 故 $M\otimes_R N$, $Tor_n^R(M,N)$ 是 Artin 模.

定理 11 定理 5 中的各模均为 G-Matlis 自反 T-模.

证明 由正合列(1)可得如下正合列

$$\begin{cases}0\to Hom_R(T,S)\to Hom_R(T,M)\to Hom_R(T,M/S)\\ Ext_R^n(T,S)\to Ext_R^n(T,M)\to Ext_R^n(T,M/S),\ n\geq 1\\ 0\to Hom_R(M/S,T)\to Hom_R(M,T)\to Hom_R(S,T)\\ Ext_R^n(M/S,T)\to Ext_R^n(M,T)\to Ext_R^n(S,T),\ n\geq 1.\end{cases}$$

由引理 4, 引理 1 及引理 2, 类似引理 6, 引理 7 的证明可得, $Hom_R(T,M)$, $Ext_R^n(T,M)$,

$Hom_R(M,T)$, $Ext_R^n(M,T)$ 均为 G-*Matlis* 自反 T-模.

又由正合列(1)有正合列

$$\begin{cases} S\otimes_R T \to M\otimes_R T \to M/S\otimes_R T \to 0 \\ Tor_n^R(S,T) \to Tor_n^R(M,T) \to Tor_n^R(M/S,T),\ n\geq 1. \end{cases}$$

由引理3, 引理10及引理1, 类似引理8的证明知, $M\otimes_R T$, $Tor_n^R(M,T)$ 为 G-*Matlis* 自反 T-模.

推论12 设 T 为 *Artin* R-模, M 是有限生成或 *Artin* R-模, 则定理5中的各模均为 G-*Matlis* 自反 T-模.

作者感谢导师刘绍学教授和程福长教授的指导.

参 考 文 献

[1] Cheng Fuchang and Wang Mingyi, *Homological dimension of G-Matlis dual modules over semilocal rings*, Comm. in Algebra, 21(1993), 1215-1220.

[2] R. Belshoff, *On Matlis reflexive modules*, Ph. D. Thesis, University of Kentucky, 1989.

[3] Huang Zhaoyong, *Some remarks on G-Matlis reflexive modules*, Jour. Math. Res. & Exp., 16(1996), 493-496.

[4] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press, 1956.

[5] 汪明义、张闺明, 交换半局部环上广义 Matlis 对偶模的同调性质, 四川师范大学学报(自然科学版), 1(1993), 14-19.

[6] 黄兆泳, Noether 半局部环上的 G-Matlis 对偶模, 广西师范大学学报(自然科学版), 2(1994), 21-25.

On Change of Ring Theorems of G-Matlis Reflexive Modules

Huang Zhaoyong

(Dept. of Math., Beijing Normal Univ., Beijing 100875)

Abstract

Let R and T be Noetherian complete semilocal rings, $R\to T$ a ring homomorphism. In this paper, we show that if T is a finitely generated or Artinian R-module, M is a G-Matlis reflexive R-module, then for all $n\geq 0$, $\mathrm{Ext}_R^n(T,M)$, $\mathrm{Ext}_R^n(M,T)$, $\mathrm{Tor}_n^R(T,M)$ and $\mathrm{Tor}_R^n(M,T)$ are G-Matlis reflexive T-modules. These results generalize the results of R. Belshoff.

Keywords G-Matlis reflexive modules, change of ring theorems, Noetherian complete semilocal rings.